

## Dual d'un problème linéaire.

•  $A$  désigne une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes,  $b$  un vecteur qui appartient à  $\mathbb{R}^m$  et  $c$  à  $\mathbb{R}^n$ . La notation  $(\bullet, \bullet)$  désigne le produit scalaire usuel et l'inégalité  $u \leq v$  entre deux vecteurs  $u$  et  $v$  signifie que toutes les composantes de  $u$  sont inférieures ou égales à toutes les composantes de  $v$  :  $u_j \leq v_j, (\forall j)$ .

1) Montrer que le dual du "programme linéaire" (P) défini par

$$(P) \quad \inf_{v \geq 0, Av \geq b} J(v) \equiv (c, v)$$

est le problème (P\*) défini par

$$(P^*) \quad \sup_{q \geq 0, A^t q \leq c} G(q) \equiv (b, q)$$

2) Montrer que si  $u$  est solution du problème (P) et  $p$  solution du problème (P\*), on a alors

$$(1) \quad (p, b - Au) = 0$$

$$(2) \quad (u, c - A^t p) = 0.$$

3) Résoudre le problème

$$(3) \quad \inf_{\substack{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, w \geq 0 \\ 4x + y + z + 2w \geq 1 \\ x + 3y + 2z + w \geq 1}} (8x + 9y + 4z + 6w),$$

en explicitant l'argument  $(x, y, z, w)$  qui réalise effectivement le minimum.

FD, octobre 1993, avril 1995, août 2002.

## Dual d'un problème linéaire.

### Proposition de corrigé.

1) Si on note  $K = \{v \geq 0, Av \geq b\}$  l'ensemble des contraintes, la question demande de trouver un Lagrangien  $\mathcal{L}(v, q)$  et l'ensemble  $U \times P$  sur lequel il est défini, de sorte que

$$(4) \quad \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q) = \begin{cases} J(v) & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On choisit ici de ne dualiser que la seconde contrainte du problème (P), c'est à dire de poser

$$(5) \quad U = ([0, +\infty[)^n$$

$$(6) \quad P = ([0, +\infty[)^m$$

et l'expression du Lagrangien reste alors classique :

$$(7) \quad \mathcal{L}(v, q) = (c, v) + (q, b - Av).$$

On vérifie aisément la relation (4) :  $\mathcal{L}(v, q)$  ne tend pas vers  $+\infty$  si  $q$  tend vers  $+\infty$  seulement si  $v$  vérifie la condition  $b - Av \leq 0$ , ce qui montre que l'ensemble  $K$  est bien défini par la relation suivante :

$$(8) \quad K = \{v \geq 0, Av \geq b\}$$

et le problème (P) correspond au problème primal relatif au Lagrangien  $\mathcal{L}(\bullet, \bullet)$ .

• L'expression du problème (P\*) est obtenue en calculant le programme dual associé au Lagrangien  $\mathcal{L}(\bullet, \bullet)$  :

$$(9) \quad \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) = \begin{cases} G(q) & \text{si } v \in Q \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or on a  $\mathcal{L}(v, q) = (c - A^t q, v) + (q, b)$  ce qui permet d'isoler la variable  $v$  au membre de droite d'un produit scalaire. La borne inférieure pour  $v \geq 0$  est différente de  $-\infty$  seulement si le vecteur  $c - A^t q$  est positif ou nul. Nous en déduisons

$$(10) \quad Q = \{q \geq 0, A^t q \leq c\},$$

ce qui démontre que le problème dual de (P) est effectivement donné par le problème (P\*).

2) On peut appliquer le théorème de Kuhn et Tucker pour un problème linéaire admettant un ensemble non vide de solutions admissibles (c'est ici l'hypothèse de qualification des contraintes). Le Lagrangien a donc un point selle  $(u, p)$  qui vérifie :

$$(11) \quad \mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p) \quad \text{pour tout } v \in U \text{ et } q \in P.$$

La première inégalité de la relation (11) implique

$$(12) \quad (q - p, b - Au) \leq 0, \quad \text{pour tout } q \text{ à coefficients positifs ou nuls.}$$

Si l'une des composantes [celle de numéro  $j$  pour fixer les idées] de  $b - Au$  est non nulle ainsi que la composante de  $p$  correspondante, elle est strictement négative compte tenu de la définition du problème (P). En prenant

$$(13) \quad q_j = \frac{1}{2} p_j$$

on a alors  $(q - p)_j (b - Au)_j > 0$  et en annulant toutes les autres composantes de  $q - p$ , on contredit l'inégalité (12). Ceci montre que si  $b - Au$  a une composante non nulle, alors la composante correspondante du multiplicateur de Lagrange est nulle. Nous avons donc établi la relation (1). L'identité (2) est obtenue de la même façon en échangeant les rôles de (P) et de son dual (P\*).

**3)** Le problème (3) est exactement de la forme (P), avec  $n = 4$  et  $m = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $c^t = (8, 9, 4, 6)$ . Il est ici plus simple de résoudre le problème dual (P\*), qui est posé à deux variables seulement et non à quatre comme le problème (3) :

$$(14) \quad \begin{array}{l} \inf \\ q_1 \geq 0, q_2 \geq 0 \\ 4q_1 + q_2 \leq 8 \\ q_1 + 3q_2 \leq 9 \\ q_1 + 2q_2 \leq 4 \\ 2q_1 + q_2 \leq 6 \end{array} (q_1 + q_2).$$

La résolution du problème (14) est élémentaire avec la figure 1. A la lecture du graphique, on déduit facilement que la solution du problème est obtenue en résolvant le système d'équations

$$(15) \quad \begin{cases} 4p_1 + p_2 = 8 \\ p_1 + 2p_2 = 4 \end{cases}$$

et qu'on sature de ce fait la première et la troisième contrainte pour la variable duale. Il vient très simplement

$$(16) \quad p_1 = \frac{12}{7}, \quad p_2 = \frac{8}{7}, \quad p_1 + p_2 = \frac{20}{7}.$$

On a donc calculé la borne inférieure relative au problème (3) mais on n'a pas encore explicité l'état  $(x, y, z, w)$  qui minimise l'expression (3). On doit pour cela utiliser à fond la notion de dualité et la seconde question. On utilise la relation

(2) qui échange les rôles des problèmes (P) et (P\*), et introduit le dual du problème (14) qui est exactement le problème (3). De plus, la solution du problème primal s'interprète comme la valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la résolution du problème dual. Or le multiplicateur de Lagrange a une composante nulle dès que l'une des contraintes du problème (14) n'est pas saturée. C'est le cas pour la seconde et la troisième équation comme nous venons de la voir. On déduit donc

$$(17) \quad y = w = 0$$

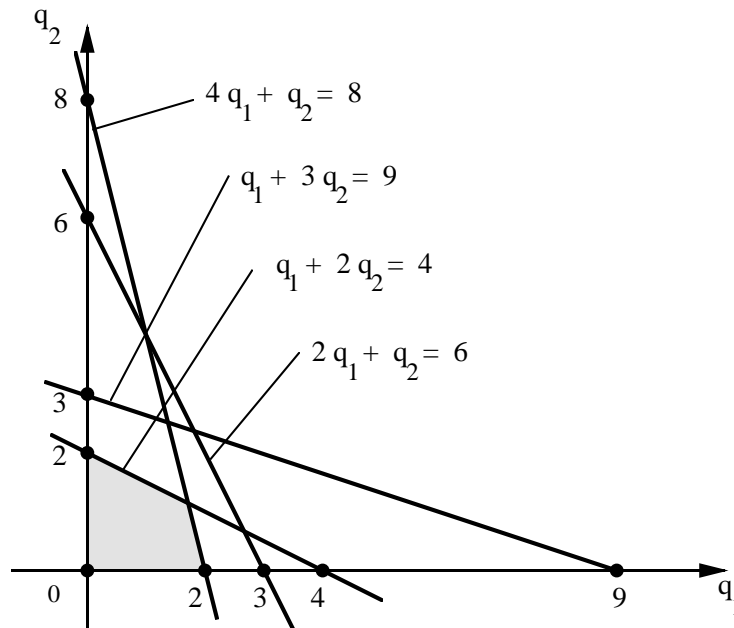
puisque le multiplicateur de Lagrange relatif au problème dual coïncide avec la solution du problème initial. Comme par ailleurs le multiplicateur de Lagrange calculé à la relation (16) a ses deux composantes non nulles, on est sûr que les contraintes sont saturées pour le problème initial, ce qu'on écrit, compte tenu de la relation (17) :

$$(18) \quad 4x + z = 1, \quad x + 2z = 1.$$

Les composantes de la solution non calculées à la relation (17) sont alors simplement déduites des relations (18) et l'on a

$$(19) \quad x = \frac{1}{7}, \quad z = \frac{3}{7}.$$

On vérifie simplement que si l'on remplace  $(x, y, z, w)$  calculés aux relations (17) et (19) par leurs valeurs respectives, on a  $8x + 9y + 4z + 6w = \frac{20}{7}$ , résultat que nous avons déjà trouvé à la relation (16) compte tenu de la propriété de point selle.



**Figure 1.** Résolution graphique du programme linéaire dual

FD, octobre 1993, avril 1995, août 2002.