Paris Nord, Macs 2, Systèmes hyperboliques.

Contrôle du 21 mai 2007 (3 heures)

Notes de cours autorisées.

Étude d'un système hyperbolique.

Dans ce problème, on se propose d'étudier quelques propriétés du système de lois de conservation

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\rho} \cos\theta\right) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{\rho} \sin\theta\right) = 0$$

d'inconnues $\rho(x,t)$ et $\theta(x,t)$ réelles, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

1) Montrer que le système (1)(2) peut s'écrire sous la forme

(3) $$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \;,\quad x \in \mathbb{R},\; t > 0$$

avec $W = (\rho, \theta)^t$ et $f(W) \in \mathbb{R}^2$ qu'on précisera.

2) Calculer la matrice jacobienne $A(W) \equiv df(W)$. Montrer qu'elle admet deux valeurs propres $\lambda_j(W)$ distinctes et opposées qu'on précisera. Préciser les vecteurs propres $r_j(W)$ correspondants tels que

(4) $$A(W) \bullet r_j(W) = \lambda_j(W)\, r_j(W).$$

3) Rappeler à quelle condition une fonction $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une entropie mathématique pour le système hyperbolique (3).

4) Montrer que la fonction $\eta(W)$ définie par

$$(5) \quad \eta(\rho, \theta) = \frac{1}{2}(\rho^2 + \theta^2)$$

est une entropie mathématique pour le système (3). Préciser le flux d'entropie $\xi(\rho, \theta)$ associé.

5) Rappeler la définition d'un j-invariant de Riemann (noté β_j dans la suite) relatif à la j° valeur propre du système hyperbolique (3).

6) Montrer qu'on peut chercher β_j, invariant de Riemann pour la j° valeur propre, sous la forme

$$(6) \quad \beta_j = \rho + \Psi_j(\theta)$$

Proposer une valeur possible de $\Psi_1(\theta)$ et $\Psi_2(\theta)$.

7) On s'intéresse à une solution autosemblable régulière de la forme

$$(7) \quad W(x,t) = V\left(\frac{x}{t}\right)$$

Montrer que si $V(\bullet)$ n'est pas constante, $\exists j \in \{1,2\}$,

$$(8) \quad \lambda_j(V(\xi)) = \xi \quad , \quad \xi = \frac{x}{t}$$

(9) $$\frac{d}{d\xi}\,\beta_j\left(V(\xi)\right) = 0 .$$

8) On se donne $\theta_0 \in]-\pi, 0[$, $\rho_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on peut construire une 1-onde de détente telle que

(10) $$W(x,t) = \begin{cases} W_0 \equiv (\rho_0, \theta_0)^t, & \xi \leqslant -e^{\rho_0} \\ V(\xi), & -e^{\rho_0} \leqslant \xi \leqslant -e^{\rho_1} \\ W_1 \equiv (\rho_1, \theta_1)^t, & \xi \geqslant -e^{\rho_1}, \end{cases}$$

où $V(\xi)$ a été introduite à la question 7) On précisera la relation entre $\theta_0, \rho_0, \theta_1, \rho_1$.

9) Reprendre la question 8) avec $\theta_0 \in]0, \pi[$.

10) Si on se donne $\theta_0 \in]0, \pi[$ et $\rho_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'on peut construire une 2-onde de détente de sorte que

(11) $$W(x,t) \begin{cases} W_0 \equiv (\rho_0, \theta_0)^t, & \xi \leqslant e^{\rho_0} \\ V(\xi), & e^{\rho_0} \leqslant \xi \leqslant e^{\rho_2} \\ W_2 = (\rho_2, \theta_2)^t, & \xi \geqslant e^{\rho_2}, \end{cases}$$

où $V(\xi)$ a été introduit à la question 7). On précisera la relation entre $\theta_0, \rho_0, \theta_2, \rho_2$.

11) Reprendre la question 10) avec $\theta_0 \in]\pi, 2\pi[$.

12) On cherche à joindre $W_0 = (\rho_0, \theta_0)^t$ à $W \equiv (\rho, \theta)^t$ par une discontinuité de vitesse σ. Quelles relations lient ces variables ?

13) On admet que les relations précédentes définissent <u>deux</u> courbes régulières passant par l'état W_0. Montrer qu'alors on a un développement de la forme

$$(12) \qquad \rho - \rho_0 = \alpha (\theta - \theta_0) + O(\theta - \theta_0)^2$$

au voisinage de $\theta = \theta_0$ si et seulement si α est solution de l'équation du second degré

$$(13) \qquad \alpha^2 + 2 \cot g\, \theta_0 \, \alpha - 1 = 0 .$$

14) Résoudre (13) et en déduire que les courbes de choc et de détente sont tangentes au point $W_0 = (\rho_0, \theta_0)$.

Avertissement

Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté des explications fournies. Le sujet est long mais les questions 3)4) ; 5) à 11) et 12) à 14) forment trois parties essentiellement indépendantes. Bon travail !

MACS(2), Paris Nord, Systèmes hyperboliques, 21/5/07

Eléments de correction.

1) $f(w) = (e^{\rho}\cos\theta, -e^{\rho}\sin\theta)^t$

2) $A(w) = e^{\rho}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ a deux valeurs propres :

$\lambda_1 = -e^{\rho}$, $\lambda_2 = e^{\rho}$. On vérifie que $r_1 = (\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})^t$ est vecteur propre pour la valeur propre λ_1 puisque

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta/2 \\ \cos\theta/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2\end{pmatrix} = -r_1$$

alors que $r_2 = (\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2})^t$ est vecteur propre pour la valeur propre λ_2. En effet,

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 \\ -\sin\theta/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta/2 \\ -\sin\theta/2\end{pmatrix} = +r_2.$$

3) La fonction η est strictement convexe et il existe un flux d'entropie $\mathcal{F}$ tel que $d\mathcal{F} = d\eta \cdot df$.

4) La fonction donnée en (5) est clairement strictement convexe. Il suffit de chercher le flux d'entropie $\mathcal{F}$.

On a :

$$d\eta \cdot A(w) = (\rho \ \ \theta)\begin{pmatrix}e^{\rho}\cos\theta & -e^{\rho}\sin\theta \\ -e^{\rho}\sin\theta & -e^{\rho}\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \left(e^{\rho}(\rho\cos\theta - \theta\sin\theta) \quad e^{\rho}(-\rho\sin\theta - \theta\cos\theta)\right).$$

On a donc nécessairement $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho} = e^{\rho}(\rho\cos\theta - \theta\sin\theta)$ et $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta} = e^{\rho}(-\rho\sin\theta - \theta\cos\theta)$.

on intègre $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \rho} = e^{\rho}(\rho\cos\theta - \theta\sin\theta)$ par rapport à ρ. Donc

$\mathcal{S} = ((\rho-1)\cos\theta - \theta\sin\theta)\,e^{\rho} + g(\theta)$

Puis on dérive cette relation par rapport à θ :

$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = (-(\rho-1)\sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta)\,e^{\rho} + g'(\theta)$

$= (-\rho\sin\theta - \theta\cos\theta)\,e^{\rho} + g'(\theta)$

et le choix $g(\theta) = 0$ convient ; $\mathcal{S} = ((\rho-1)\cos\theta - \theta\sin\theta)\,e^{\rho}$

5) $d\beta_j \cdot r_j = 0$

6) on sépare les deux cas $j = 1$ et $j = 2$

* $j=1$, ie $\lambda = -e^{\rho}$, $r_j = \left(\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)^t$.

$d\beta_j \cdot r_j = \frac{\partial \beta_1}{\partial \rho} \cdot \sin\frac{\theta}{2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta}\cos\frac{\theta}{2}$

$= \sin\frac{\theta}{2} + \psi_1'(\theta)\cos\frac{\theta}{2}$, $\psi_1'(\theta) = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

soit $\psi_1(\theta) = 2\log\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$; $\beta_1 = \rho + 2\log\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

* $j=2$, ie $\lambda = e^{\rho}$, $r_j = \left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\right)^t$

$d\beta_j \cdot r_j = \frac{\partial \beta_2}{\partial \rho}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)$

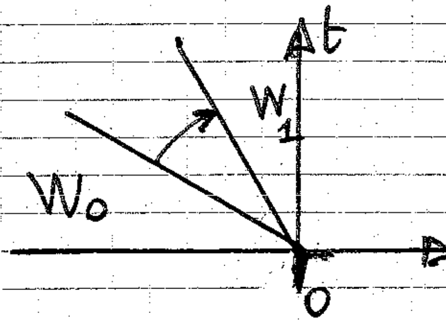
$= \cos\frac{\theta}{2} - \psi_2'(\theta)\sin\frac{\theta}{2}$, $\psi_2'(\theta) = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$.

soit $\psi_2(\theta) = 2\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$; $\beta_2 = \rho + 2\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$.

7) Pour une solution autosemblable $W(x,t) = V\left(\frac{x}{t}\right)$,
on a $\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} V' = -\frac{1}{t} \xi V'(\xi)$ et $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{t} V'(\xi)$.
Donc $\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) . \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{t}\left(A(W) V' - \xi V' \right)$.
ou bien $V' = 0$ et $V(\xi)$ est un état constant ; ou bien $V' \neq 0$ et V est vecteur propre de $A(V)$ pour une valeur propre $\lambda_j(V)$. Compte tenu de (4), on a alors $\xi = \lambda_j(V(\xi))$ et $\exists \alpha_j(\xi)$ tel que $\frac{dV}{d\xi} = \alpha_j(\xi)\, r_j(V(\xi))$. Ceci établit la relation (8).

La relation (9) est alors facile :
$\frac{d}{d\xi} \beta_j(V(\xi)) = d\beta_j(V) . \frac{dV}{d\xi} = \alpha_j \, d\beta_j . r_j = 0$ et l'invariant de Riemann β_j est <u>constant</u> le long d'une telle onde.

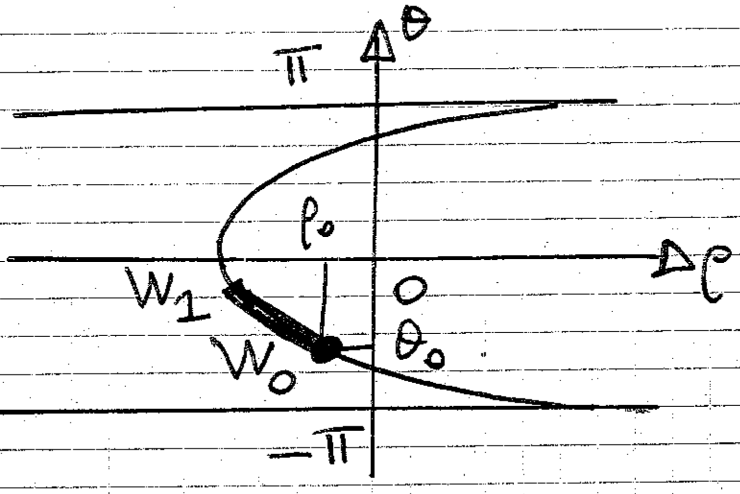
8)



La variable $\xi = \frac{x}{t}$ croît de W_0 à W_1, en restant égale à la première valeur propre $\xi = -e^{\rho_0}$ pour la limite de l'état constant W_0 et $\xi = -e^{\rho_1}$ pour l'état W_1. De plus, l'invariant de Riemann β_1 est constant, ie

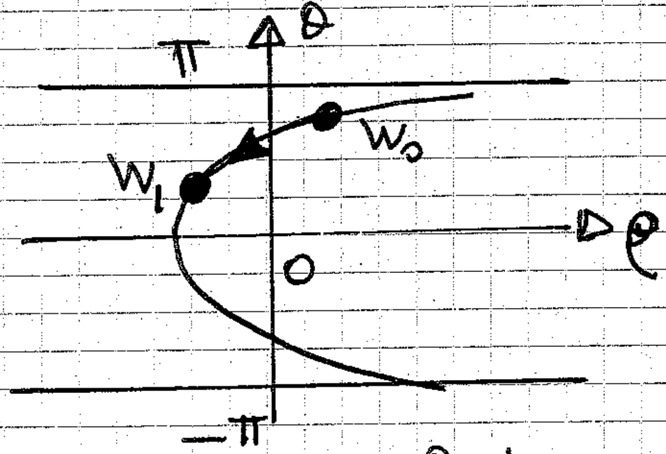
(*) $\rho + 2 \log \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \rho_0 + 2 \log \left| \cos \frac{\theta_0}{2} \right|$

en particulier pour $\rho = \rho_1$ et $\theta = \theta_1$. On trace une courbe qui satisfait (*), avec $-\pi < \theta_0 < 0$.



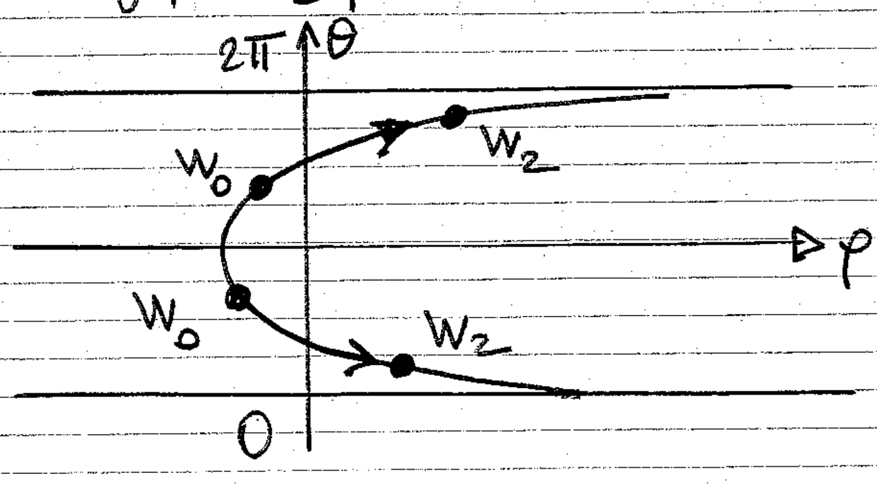
Les états W_1 admissibles sont situés sur cette courbe et sont tels que $\rho_1 \leq \rho_0$. D'où la courbe de détente représentée en gras sur la figure ci-dessus.

9) avec $0<\theta_0<\pi$, on adapte la figure du haut de la page pour garantir que ρ décroît avec ξ.



$\rho_1 \leq \rho_0$ et $\rho_1 + 2\log\left|\cos\frac{\theta_1}{2}\right| = \rho_0 + 2\log\left|\cos\frac{\theta_0}{2}\right|$.

10)
11) on écrit que le second invariant de Riemann $\beta_2 \equiv \rho + 2\log\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ est constant.



Cette fois, $\xi = e^{\rho}$ est croissant quand on passe de W_0 à W_2. On parcourt donc la courbe $\beta_2 = $ constante dans l'autre direction, comme indiqué à la figure du bas de la page 4. On a lieu sur $\rho_2 + 2\log|\sin\frac{\theta_2}{2}| =$
$= \rho_0 + 2\log|\sin\frac{\theta}{2}|$.

12) $[f] = \sigma[w]$, soit $e^{\rho}\cos\theta - e^{\rho_0}\cos\theta_0 = \sigma(\rho - \rho_0)$
$-e^{\rho}\sin\theta + e^{\rho_0}\sin\theta_0 = \sigma(\theta - \theta_0)$.
Ce sont les relations de Rankine et Hugoniot.

13) On fait le rapport des deux relations précédentes pour éliminer σ. On divise par ρ_0. On en déduit

$$(\theta-\theta_0)\left[e^{\rho-\rho_0}\cos\theta - \cos\theta_0\right] + (\rho-\rho_0)\left[e^{\rho-\rho_0}\sin\theta - \sin\theta_0\right] = 0.$$

On fait le développement limité de cette expression sous l'hypothèse (12); il vient

$$(\theta-\theta_0)^2\left[\alpha\cos\theta_0 - \sin\theta_0 + \alpha\left(\alpha\sin\theta_0 + \cos\theta_0\right)\right] + O(\theta-\theta_0)^3 = 0$$

d'où $\alpha^2\sin\theta_0 + 2\alpha\cos\theta_0 - \sin\theta_0$ et (13)

14) La suite est élémentaire: $\alpha = -\cot g\theta_0 \pm \dfrac{1}{\sin\theta_0}$

$\alpha_+ = \dfrac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = tg\dfrac{\theta_0}{2}$, $\alpha_- = -\dfrac{1+\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = -\cot g\dfrac{\theta_0}{2}$.

Si $\alpha = \alpha_+$, on retrouve la pente de la 1 détente: $\frac{d\rho}{d\theta} = -\psi_1'(\theta) = tg\frac{\theta}{2}$. Si $\alpha = \alpha_-$, c'est celle de la 2 détente puisque $\frac{d\rho}{d\theta} = -\psi_2'(\theta) = -\cot g\frac{\theta}{2}$, établis à la question 6.