Axiomatisation de l'interpolation de Van Leer

On se donne un réel $h > 0$, une famille $(u_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels et on cherche, étant donné un intervalle $I_{j+\frac{1}{2}} \equiv]jh, (j+1)h[$, à construire une valeur extrapolée u_{j+1}^- "à gauche" du point $(j+1)h$ qui soit fonction uniquement de la valeur $u_{j+\frac{1}{2}}$, affectée à la maille $I_{j+\frac{1}{2}}$ et des deux "voisines" $u_{j-\frac{1}{2}}$ et $u_{j+\frac{3}{2}}$. On pose :

(1) $\qquad u_{j+1}^- \;=\; G\big(u_{j-\frac{1}{2}}\,,\, u_{j+\frac{1}{2}}\,,\, u_{j+\frac{3}{2}}\big)\,.$

On procède de même avec une valeur extrapolée u_j^+ "à droite" du point jh et on pose

(2) $\qquad u_j^+ \;=\; D\big(u_{j-\frac{1}{2}}\,,\, u_{j+\frac{1}{2}}\,,\, u_{j+\frac{3}{2}}\big)\,.$

On suppose la fonction $G(\bullet, \bullet, \bullet)$ invariante par translation :

(3) $\qquad G(u+\lambda\,,\, v+\lambda\,,\, w+\lambda) \;=\; G(u\,,\, v\,,\, w) + \lambda\,, \qquad \forall\, u,\, v,\, w,\, \lambda \in \mathbb{R},$

invariante par homothétie :

(4) $\qquad G(\lambda\, u\,,\, \lambda\, v\,,\, \lambda\, v) \;=\; \lambda\, G(u\,,\, v\,,\, w)\,, \qquad \forall\, u,\, v,\, w,\, \lambda \in \mathbb{R},$

et monotone :

(5) $\qquad G(u,\, v,\, w) \in \big[\min(v,\, w)\,,\, \max(v,\, w)\big]\,, \qquad \forall\, u,\, v,\, w \in \mathbb{R}.$

Nous allons étudier les propriétés de la fonction G et nous en déduirons un schéma non linéaire à variation totale décroissante.

1) Montrer qu'alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de sorte que

(6) $\qquad G(u,\, v,\, w) \;=\; v + \dfrac{1}{2}\,\varphi\Big(\dfrac{v-u}{w-v}\Big)\,(w-v)\,, \qquad \forall\, u,\, v \neq w \in \mathbb{R}.$

2) Montrer que la fonction φ est bornée et plus précisément que

(7) $\qquad 0 \leq \varphi(r) \leq 2\,, \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}\,.$

En déduire que la représentation (6) garde un sens pour tout $u,\, v,\, w$ dans $\mathbb{R}$; en pratique, le cas $v = w$ ne pose pas de problème.

3) On définit la fonction D grâce à l'invariance "gauche-droite", c'est à dire

(8) $\qquad D(u,\, v,\, w) \;=\; G(w,\, v,\, u)\,, \qquad \forall\, u,\, v,\, w \in \mathbb{R}.$

Exprimer $D(u,\, v,\, w)$ en fonction de v, $w - v$, $r \equiv \dfrac{v-u}{w-v}$ et la fonction $\varphi(\bullet)$.

4) A toutes les hypothèses précédentes, on ajoute la "conservation de la convexité" : si les deux pentes discrètes $v - u$ et $w - v$ forment une suite croissante, alors il en est de même pour les pentes reconstruites $D(u,\, v,\, w) - u$, $v - D(u,\, v,\, w)$, $G(u,\, v,\, w) - v$ et $w - G(u,\, v,\, w)$:

$$(9) \quad \begin{cases} (v-u \le w-v) \Longrightarrow \big(D(u,\,v,\,w) - u \le \\ \qquad\qquad \le v - D(u,\,v,\,w) \le G(u,\,v,\,w) - v \le w - G(u,\,v,\,w) \big) \end{cases}$$

et si on retourne l'inégalité au membre de gauche de l'implication (9), on change de sens les inégalités dans le membre de droite. Plus précisément, on a :

$$(9)(\text{bis}) \quad \begin{cases} (v-u \ge w-v) \Longrightarrow \big(D(u,\,v,\,w) - u \ge \\ \qquad\qquad \ge v - D(u,\,v,\,w) \ge G(u,\,v,\,w) - v \ge w - G(u,\,v,\,w) \big) \end{cases}$$

Montrer que la fonction φ introduite à la relation (6) satisfait alors les trois inégalités suivantes :

(10) $\qquad \varphi(r) \le 1 \qquad$ pour $\quad r \le 1$

(11) $\qquad \varphi(r) \ge 1 \qquad$ lorsque $\quad r \ge 1$

(12) $\qquad \varphi(r) \le r\,\varphi\Big(\dfrac{1}{r}\Big) \qquad$ si $\quad r \ge 1\,.$

5) Déduire des questions précédentes que

(13) $\qquad \varphi(r) \ge \max(0,\,r) \qquad$ si $r \le 1$

(14) $\qquad \varphi(r) \le \min(r,\,2) \qquad$ si $r \ge 1$

et représenter graphiquement les régions *a priori* admissibles pour les valeurs de la fonction φ.

6) En plus des hypothès précédentes, on suppose qu'il existe $\alpha,\ 1 \le \alpha \le 2$ de sorte que

(15) $\qquad \varphi(r) \le (\alpha - 2)\,r\,, \qquad r \le 0$

(16) $\qquad \varphi(r) \le \alpha\,r\,, \qquad 0 \le r \le 1$

(17) $\qquad \varphi(r) \le \alpha\,, \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}\,.$

En déduire qu'alors

$$(18) \qquad 0 \le 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} - \frac{1}{2}\,\varphi(r') \le 1 + \frac{\alpha}{2}\,, \qquad \forall\, r\,,\, r' \in \mathbb{R},\ r \ne 0\,.$$

7) On introduit un réel $a > 0$ et on cherche à approcher la solution régulière $u(x,\,t)$ (de classe au moins C^2) de l'équation d'advection

$$(19) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

par un schéma de volumes finis. On se donne un pas d'espace h, un pas de temps Δt et une famille $(u^n_{j+\frac{1}{2}})_{j\in\mathbb{Z}}$ qui approche les valeurs $u\big((j+\frac{1}{2})\,h\,,\,n\,\Delta t\big)$ au temps $t^n = n\,\Delta t$. On incrémente le schéma en temps au moyen de la relation explicite

$$(20) \quad \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} + a\, \frac{G\big(u_{j-\frac{1}{2}}^{n}\,,\, u_{j+\frac{1}{2}}^{n}\,,\, u_{j+\frac{3}{2}}^{n}\big) - G\big(u_{j-\frac{3}{2}}^{n}\,,\, u_{j-\frac{1}{2}}^{n}\,,\, u_{j+\frac{1}{2}}^{n}\big)}{h} = 0.$$

Pour u solution régulière de (19), l'erreur de troncature $\mathcal{T}$ au point $(x,\, t)$ de l'espace temps et pour un pas $(h,\, \Delta t)$ de discrétisation en espace et en temps est définie par :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{T}(h,\, \Delta t\,;\, x,\, t\,;\, u(\bullet)) \;\equiv\; & \frac{u(x,\, t+\Delta t) - u(x,\, t)}{\Delta t} + \\ & + \frac{a}{h} \Big[G\big(u(x-h,\, t)\,,\, u(x,\, t)\,,\, u(x+h,\, t)\big) \\ & \qquad - G\big(u(x-2h,\, t)\,,\, u(x-h,\, t)\,,\, u(x,\, t)\big) \Big]\,. \end{aligned} \right.$$

Montrer que si $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, t)$ est non nul et φ dérivable en $r = 1$, on a

$$(22) \qquad \mathcal{T}(h,\, \Delta t\,;\, x,\, t\,;\, u(\bullet)) \;=\; \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, \mathrm{O}(h^2)\,.$$

Montrer que si $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\, t) = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\, t) \neq 0$, la conclusion (22) demeure si on suppose

$$(23) \qquad \varphi(-1) \,+\, \varphi(3) \;=\; 2\,.$$

8) Montrer que sous une hypothèse concernant le pas de temps qu'on explicitera, le schéma (20) est à variation totale décroissante :

$$(24) \qquad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \,-\, u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \mid \,\leq\, \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \mid u_{\ell+\frac{1}{2}}^{n} \,-\, u_{\ell-\frac{1}{2}}^{n} \mid \,.$$

Axiomatisation de l'interpolation de Van Leer
Proposition de corrigé

1) Si $w - v$ est non nul, on a facilement :

$$G(u,\, v,\, w) \,=\, v + G(u-v,\, 0,\, w-v) \,=\, v \,+\, G\Big(\frac{u-v}{w-v}\,,\, 0\,,\, 1\Big)\,(w-v)$$

et pour r nombre réel arbitraire, on a nécessairement : $\varphi(r) \,=\, 2\,G(-r\,,\, 0\,,\, 1)$. La réciproque est claire.

2) Avec la représentation (6), on a : $G(u,\, v,\, w) = \big(1-\frac{1}{2}\varphi(r)\big)\, v + \frac{1}{2}\varphi(r)\, w$ après avoir introduit le rapport $r \equiv \frac{v-u}{w-v}$ des pentes successives. Si $v < w$ pour fixer les idées, la condition de monotonie (5) exprime que

$$v \,\leq\, \big(1 - \frac{1}{2}\varphi(r)\big)\, v \,+\, \frac{1}{2}\varphi(r)\, w \,\leq\, w$$

quel que soit u c'est à dire quel que soit r. On en déduit $\varphi(r) \,\geq\, 0$ et $\frac{1}{2}\varphi(r) \leq 1$, ce qui établit la relation (7). Comme la fonction φ est bornée, la représentation (6) reste valable même lorsque l'argument r n'est pas défini.

3) On a facilement

$$D(u,\, v,\, w) \,=\, G(w,\, v,\, u) \,=\, v \,+\, \frac{1}{2}\,\varphi\Big(\frac{v-w}{u-v}\Big)\,(u-v)$$

$$= v \,+\, \frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{1}{\dfrac{v-u}{w-v}}\right)\frac{u-v}{w-v}\,(w-v) \,=\, v \,-\, \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big)\,(w-v)\,.$$

4) L'hypothèse au membre de gauche de l'implication (9) signifie $(r-1)(w-v) \leq 0$ avec les notations introduites plus haut. La membre de droite prend alors la forme :

$$v \,-\, \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big)\,(w-v) \,-\, u \,\leq\, v - \Big[v \,-\, \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big)\,(w-v)\Big] \,\leq$$

$$\leq\, v + \frac{1}{2}\,\varphi(r)\,\,(w-v) \,-\, v \,\leq\, w - \Big[v + \frac{1}{2}\,\varphi(r)\,\,(w-v)\Big]\,.$$

Si $w - u$ est positif, on a alors $r \leq 1$ et ces inégalités deviennent

$$r - \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big) \,\leq\, \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big) \,\leq\, \frac{1}{2}\,\varphi(r) \,\leq\, 1 - \frac{1}{2}\,\varphi(r)\,, \qquad r \leq 1\,.$$

Si $w - v$ est négatif, on a alors $r \leq 1$ mais il faut aussi changer le sens des inégalités. Il vient dans ce cas :

$$r - \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big) \,\geq\, \frac{1}{2}\,r\,\varphi\Big(\frac{1}{r}\Big) \,\geq\, \frac{1}{2}\,\varphi(r) \,\geq\, 1 - \frac{1}{2}\,\varphi(r)\,, \qquad r \geq 1\,.$$

Les inégalités (10), (11) et (12) s'en déduisent alors sans difficulté.

5) La relation (13) est claire si $r \le 0$ compte tenu de (7). Pour $0 \le r \le 1$, elle résulte de (12) et de (11) puisque lorsque $\rho = \frac{1}{r} \le 1$ on a

$$\varphi(\rho) \,\ge\, \rho\, \varphi\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \,\ge\, \rho\,.$$

La relation (13) résulte alors de (7). De même, pour $r \ge 1$, la relation (12) entraîne

$\varphi(r) \,\le\, r\, \varphi\Big(\dfrac{1}{r}\Big) \,\le\, r$ compte tenu de (10). La conclusion est à nouveau une conséquence de la monotonie (7).

6) On sépare l'étude en deux.

• $r \le 0$. Alors $\frac{1}{2}\,\varphi(r') \,\le\, \frac{\alpha}{2}$ et $-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,\le\, \frac{2-\alpha}{2}$. En additionnant ces deux inégalités, il vient

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,+\, \frac{1}{2}\,\varphi(r') \,\le\, 1$$

ce qui constitue l'inégalité de gauche de (18). Pour l'inégalité de droite, on a simplement

$$1 \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,\le\, 1 \,\le\, 1 + \frac{1}{2}\,\varphi(r') \,\le\, 1 + \frac{\alpha}{2}\,.$$

• $r > 0$. Alors $\frac{1}{2}\,\varphi(r') \,\le\, \frac{\alpha}{2}$ et $-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,\le\, 0$. La somme fournit maintenant

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,+\, \frac{1}{2}\,\varphi(r') \,\le\, \frac{\alpha}{2} \,\le\, 1\,,$$

ce qui établit encore l'inégalité de gauche de la relation (18). Pour l'inégalité de droite, on suppose d'abord $r \le 1$. Il vient dans ce cas :

$$1 \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(r)}{r} \,\le\, 1 \,+\, \frac{\alpha}{2} \,\le\, 1 \,+\, \frac{\alpha}{2} \,+\, \frac{1}{2}\,\varphi(r')\,.$$

Lorsque $r \ge 1$, on a $\frac{\varphi(r)}{r} \le \varphi\big(\frac{1}{r}\big) \le \alpha$, dont on déduit

$1 \,+\, \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varphi(r)}{r} \,\le\, 1 \,+\, \dfrac{\alpha}{2} \,\le\, 1 \,+\, \dfrac{\alpha}{2} \,+\, \varphi(r')$ ce qui achève la preuve.

7) Soit $r^+ \,\equiv\, \dfrac{u(x,\,t) - u(x-h,\,t)}{u(x+h,\,t) - u(x,\,t)}$ et $r^- \,\equiv\, \dfrac{u(x-h,\,t) - u(x-2h,\,t)}{u(x,\,t) - u(x-h,\,t)}$.

L'erreur de troncature $\mathcal{T}$ s'explicite alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{T} \,=\, \frac{u(x,\,t+\Delta t) - u(x,\,t)}{\Delta t} \,+\, \frac{a}{\Delta x}\Big[\,u(x,\,t) + \frac{1}{2}\,\varphi(r^+)\,\big(u(x+h,\,t) - u(x,\,t)\big) \\ -\Big(u(x-h,\,t) + \frac{1}{2}\,\varphi(r^-)\,\big(u(x,\,t) - u(x-h,\,t)\big)\Big)\Big]\,.\end{aligned}$$

On détaille le développement de r^+ :

$$r^+ \;=\; \frac{h\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)}{h\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)} \;=\; 1 - h\,\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \mathrm{O}(h^2) \qquad \text{si } \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$$

et $r^+ \;=\; -1 \,+\, \mathrm{O}(h)$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \neq 0.$

On a de manière analogue :

$$r^- \;=\; \frac{h\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{3h^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)}{h\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{h^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)} \;=\; 1 - h\,\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \mathrm{O}(h^2) \qquad \text{si } \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$$

et $r^- \;=\; 3 + \mathrm{O}(h)$ si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \neq 0.$ On en déduit le développement suivant pour l'erreur de troncature dans le premier cas :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \;=\; & \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, \frac{a}{h}\bigg[h\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3) \\
& + \frac{1}{2}\Bigg(1 - h\,\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \mathrm{O}(h^2)\Bigg)\Bigg(h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)\Bigg)\bigg] \\
=\; & \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, \frac{a}{h}\bigg[-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)\bigg] \\
=\; & \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, \mathrm{O}(h^2)
\end{aligned}$$

puisque $u(\bullet,\,\bullet)$ est solution de (19). Dans le second cas, les valeurs de $\varphi(r^+)$ et $\varphi(r^-)$ ne se factorisent pas et l'on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \;=\; & \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, \frac{a}{h}\bigg[h\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3) \\
& + \frac{1}{2}\big(\varphi(-1) + \mathrm{O}(h)\big)\Big(\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)\Big) - \frac{1}{2}\big(\varphi(3) + \mathrm{O}(h)\big)\Big(-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^3)\Big)\bigg] \\
=\; & \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{O}(\Delta t) \,+\, a\Big[\Big(-\frac{h}{2} + \frac{h}{4}\varphi(-1) + \frac{h}{4}\varphi(3)\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{O}(h^2)\Big]
\end{aligned}$$

et la relation (22) est établie sous l'hypothèse (23).

8) La preuve suit essentiellement le cours. La condition de Courant s'écrit simplement $a\frac{\Delta t}{h}(1 + \frac{\alpha}{2}) \;\leq\; 1\,.$

w

FD, mars 2005, édition juillet 2005.