Pénalisation.

• La lettre K désigne un convexe fermé non vide de l'espace $V = \mathbb{R}^n$ et J une fonction semi-continue inférieurement α-convexe définie sur V et à valeurs réelles. On désigne par u la solution du problème de minimisation

$$(P) \qquad \inf_{v \in K} \; J(v)$$

et on suppose le convexe K tel qu'il existe une fonction convexe continue positive $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de sorte que

$$(1) \qquad v \in K \;\; \text{équivaut à} \;\; F(v) = 0\,;$$

on peut par exemple choisir $F(v) = \| \, v - P_K v \, \|^2$ où P_K est le projecteur sur le convexe fermé K.

• Pour ϵ réel strictement positif, on introduit une fonctionnelle J_ϵ, appelée "pénalisation" la fonction J :

$$(2) \qquad J_\epsilon(v) \;\equiv\; J(v) \,+\, \frac{1}{\epsilon}\, F(v)\,, \quad \epsilon > 0\,, \quad v \in V$$

et le problème de minimisation sans contrainte associé à cette perturbation J_ϵ :

$$(P_\epsilon) \qquad \inf_{v \in V} \; J_\epsilon(v)\,.$$

1) Montrer que le problème (P) possède une solution unique u et que de même, le problème (P_ϵ) possède une solution unique u_ϵ.

2) Montrer que les suites $\big(J(u_\epsilon)\big)_{\epsilon>0}$ et $\big(J_\epsilon(u_\epsilon)\big)_{\epsilon>0}$ sont bornées.

3) En déduire que u_ϵ tend vers u si ϵ tend vers zéro.

4) Reprendre les questions précédentes si V est un espace de Hilbert de dimension quelconque.

FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.

Pénalisation.
Proposition de corrigé.

1) Comme la fonction J est α-convexe semi-continue inférieurement et que le problème (P) est posé sur un ensemble K qui est un convexe fermé non vide, le problème (P) a bien une solution unique u. Pour le problème (P_ϵ), il suffit de vérifier que la fonction J_ϵ est est α-convexe semi-continue inférieurement. La semi-continuité inférieure résulte du fait que les deux fonctions J et F sont semi-continues inférieurement, et l'α-convexité de J_ϵ est conséquence d'une part de l'α-convexité de J et d'autre part de la zéro-convexité de F :

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon\big((1-\delta)\,v \,+\, \delta\, w\big) \;&=\; J\big((1-\delta)\,v \,+\, \delta\, w\big) \;+\; \frac{1}{\epsilon}\, F\big((1-\delta)\,v \,+\, \delta\, w\big) \;\leq \\
&\leq\; (1-\delta)\, J(v) + \delta\, J(w) - \frac{\alpha}{2}\,\delta\,(1-\delta)\;\, ||\, v-w\,||^2 \;+\; \frac{1}{\epsilon}\,\big(\,(1-\delta)\,F(v) + \delta\, F(w)\,\big) \\
&\leq\; (1-\delta)\, J_\epsilon(v) \,+\, \delta\, J_\epsilon(w) \,-\, \frac{\alpha}{2}\,\delta\,(1-\delta)\;\, ||\, v-w\,||^2 \;.
\end{aligned}
$$

2) On remarque que la famille u_ϵ vérifie les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
J(u_\epsilon) \;&\leq\; J_\epsilon(u_\epsilon) &&\text{car } J \,\leq\, J_\epsilon \text{ de façon générale} \\
&\leq\; J_\epsilon(u) &&\text{car } u_\epsilon \text{ minimise } J_\epsilon \text{ sur } V \\
&\leq\; J(u) &&\text{car } J_\epsilon(u) = J(u) \text{ puisque } u \in K\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit donc

(3) $\qquad J(u_\epsilon) \;\leq\; J_\epsilon(u_\epsilon) \;\leq\; J(u)\,,$

ce qui montre que les suites $\big(J(u_\epsilon)\big)_{\epsilon>0}$ et $\big(J_\epsilon(u_\epsilon)\big)_{\epsilon>0}$ sont bornées.

3) Comme une fonction α-convexe est infinie à l'infini, la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée. Or V est un espace de dimension finie, il est donc relativement compact et quitte à extraire une sous-suite de la précédente, on peut supposer que $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge vers un point v. Comme on a par ailleurs

(4) $\qquad 0 \;\leq\; F(u_\epsilon) \;=\; \epsilon\,(\,J_\epsilon(u_\epsilon) \,-\, J(u_\epsilon)\,)\,,$

les estimations (3) et le fait que J, fonction α-convexe, est minorée sur l'espace V tout entier, montrent que la différence $J_\epsilon(u_\epsilon) - J(u_\epsilon)$ reste bornée quand ϵ tend vers zéro. On en déduit que $F(u_\epsilon)$ tend vers zéro dans les mêmes circonstances. La fonction F étant continue, il est clair que $F(v) = 0$ c'est à dire que v appartient au convexe K. Mais J est semi-continue inférieurement, donc on a :

(5) $\qquad J(v) \;\leq\; \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0}\; J(u_\epsilon)$

et le membre de droite de l'inégalité (5) reste inférieur ou égal à $J(u)$ compte tenu des estimations (3). La limite v appartient à K et vérifie de plus $J(v) \leq J(u)$, donc est exactement égale à u. Comme on peut répéter cet argument pour toute sous-suite extraite d'une sous-suite de la famille u_ϵ, l'ensemble de la famille $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge en fait vers u, ce qui montre la propriété.

4) Lorsque l'espace V est de dimension infinie, les problèmes (P) et (P_ϵ) ont une solution unique u et u_ϵ par les mêmes arguments que ceux vus précédemment. Les estimations (2) et (3) ne font aucunement appel au fait que V était de dimension finie donc elles restent encore valables. Par contre on peut seulement affirmer qu'une sous-suite extraite de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge **faiblement** vers v compte tenu de la compacité faible de la boule unité [les fanas pourront consulter le livre de H. Brézis : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983]. Mais comme la fonction F est convexe semi-continue inférieurement, la semi-continuité inférieure demeure pour la topologie faible et l'on a, compte tenu de (4) :

$$(6) \qquad 0 \;\leq\; F(v) \;\leq\; \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} F(u_\epsilon) \quad = \; 0\,,$$

ce qui montre que $F(v) = 0$, c'est à dire $v \in K$. De même, la fonction J est faiblement semi-continue inférieurement, donc l'estimation (5) est encore vérifiée et on en déduit encore l'inégalité $J(v) \leq J(u)$. Comme la solution du problème (P) est unique, v est égal à u.

• Pour étendre ce résultat, c'est à dire montrer la convergence **forte** de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ vers u, on montre une propriété supplémentaire : la suite $J(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ est fonction décroissante de ϵ, c'est à dire croît lorsque ϵ tend vers zéro par valeurs supérieures. En effet, si $\epsilon' < \epsilon$, on a

$$(6) \qquad J_\epsilon(u_\epsilon) \;\leq\; J_\epsilon(u_{\epsilon'}) \;\leq\; J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'})$$

puisque d'une part u_ϵ minimise J_ϵ sur V tout entier et d'autre part $\frac{1}{\epsilon}F(w)$ reste toujours inférieur ou égal à $\frac{1}{\epsilon'}F(w)$ ce qui entraîne $J_\epsilon \leq J_{\epsilon'}$. La suite $J_\epsilon(u_\epsilon)$ étant croissante bornée supérieurement par $J(u)$ pour ϵ tendant vers zéro, la limite inférieure de cette suite est exactement égale à sa limite, et l'on a :

$$(7) \qquad \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon) \;=\; \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon) \;\leq\; J(u)\,.$$

On tire de (5) et (7) et de la convergence faible de u_ϵ vers u la suite d'inégalités

$$J(u) \;=\; J(\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \text{ faible } \; u_\epsilon) \;\leq\; \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} J(u_\epsilon)$$

$$\leq \liminf_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon) \;=\; \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon) \quad \leq\; J(u)$$

qui montrent que la limite de la suite $J_\epsilon(u_\epsilon)$ est égale à $J(u)$:

$$(8) \qquad \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon) \;=\; J(u)\,.$$

En écrivant l'α-convexité de J_ϵ au point milieu des deux états u et u_ϵ $(\delta = \frac{1}{2})$, il vient

$$\frac{\alpha}{8}\; || \, u - u_\epsilon \, ||^2 \;\leq\; \frac{1}{2} \left(J_\epsilon(u) \,+\, J_\epsilon(u_\epsilon) \,-\, 2\, J_\epsilon\Big(\frac{u+u_\epsilon}{2}\Big) \right).$$

On déduit du fait que $J(u_\epsilon)$ minore la fonctionnelle $J(\bullet)$ sur l'espace V et de l'égalité $J_\epsilon(u) = J(u)$ puisque u appartient au convexe K, l'estimation suivante :

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{8}\; || \, u - u_\epsilon \, ||^2 \leq\; \frac{1}{2} \big(J(u) \,-\, J_\epsilon(u_\epsilon) \big)$$

et la convergence de la suite des minima $J_\epsilon(u_\epsilon)$ vers le minimum $J(u)$ (relation (8)) montre, compte tenu de l'inégalité (9), la convergence forte de $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ vers u, ce qui établit la propriété.

FD, novembre 1993, avril 1995, août 2002.