Volumes finis pour l'équation des ondes.

• On étudie l'équation des ondes à une dimension d'espace ($x \in \mathbb{R}$), paramétrée par la vitesse du son $c_0 > 0$:

(1) $$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 .$$

1) On pose

(2) $$u = \frac{1}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t} , \quad v = \frac{\partial p}{\partial x} , \quad W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

Montrer que si la pression p est solution de l'équation (1), on a la relation :

(3) $$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

avec la matrice A à deux lignes et deux colonnes suivante :

(4) $$A = - c_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

2) Montrer que les vecteurs

(5) $$r_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres de la matrice A avec des valeurs propres associées λ_1 et λ_2 que l'on précisera.

3) On développe le vecteur inconnu W dans la base précédente des vecteurs propres r_k :

(6) $$W = \sum_{k=1}^{2} \varphi^k \, r_k .$$

Quelle est l'équation satisfaite par la variable scalaire φ^1 ?
Même question pour la seconde variable φ^2.

4) On cherche à approcher l'équation (3) par la méthode des volumes finis. Un volume $V_{j+1/2}^{n+1/2}$ d'espace-temps ($j \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}$) est défini par :

(7) $$V_{j+1/2}^{n+1/2} = \left] x_j \, , \, x_{j+1} \right[\times \left] t^n \, , \, t^n + \Delta t \right[$$

où $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$ sont des pas d'espace et de temps fixés et

(8) $\qquad x_j \;=\; j\,\Delta x\,, \quad t^n \;=\; n\,\Delta t\,.$

Montrer que si on pose

(9) $$W^n_{j+1/2} \;=\; \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1}} W(x\,,\,t^n)\,\mathrm{d}x$$

(10) $$f_j^{n+1/2} \;=\; \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^n\,+\,\Delta t} A\,W(x_j\,,\,t)\,\mathrm{d}t$$

avec $W(\bullet\,,\,\bullet)$ solution de l'équation (3), on a :

(11) $$\frac{1}{\Delta t}\Big(W^{n+1}_{j+1/2} - W^n_{j+1/2}\Big) + \frac{1}{\Delta x}\Big(f^{n+1/2}_{j+1} - f^{n+1/2}_j\Big) \;=\; 0\,.$$

5) Pour définir un schéma numérique qui approche l'équation (3), on pose à l'instant initial $t = 0$

(12) $$W^0_{j+1/2} \;=\; \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1}} W(x\,,\,0)\,\mathrm{d}x$$

et on passe de $W^n_{j+1/2}$ à $W^{n+1}_{j+1/2}$ à l'aide de la relation (11). On calcule le flux $f_j^{n+1/2}$ grâce à un schéma numérique $\Phi(\bullet\,,\,\bullet)$:

(13) $$f_j^{n+1/2} \;=\; \Phi\Big(W^n_{j-1/2}\,,\,W^n_{j+1/2}\Big)\,.$$

Compte tenu de la question 3, lequel des quatre schémas suivants

(14) $$\Phi_1\Big(W^n_{j-1/2}\,,\,W^n_{j+1/2}\Big) \;=\; \lambda_1\,\varphi^{1,n}_{j-1/2}\,r_1 \;+\; \lambda_2\,\varphi^{2,n}_{j-1/2}\,r_2$$

(15) $$\Phi_2\Big(W^n_{j-1/2}\,,\,W^n_{j+1/2}\Big) \;=\; \lambda_1\,\varphi^{1,n}_{j+1/2}\,r_1 \;+\; \lambda_2\,\varphi^{2,n}_{j-1/2}\,r_2$$

(16) $$\Phi_3\Big(W^n_{j-1/2}\,,\,W^n_{j+1/2}\Big) \;=\; \lambda_1\,\varphi^{1,n}_{j+1/2}\,r_1 \;+\; \lambda_2\,\varphi^{2,n}_{j+1/2}\,r_2$$

(17) $$\Phi_4\Big(W^n_{j-1/2}\,,\,W^n_{j+1/2}\Big) \;=\; \lambda_1\,\varphi^{1,n}_{j-1/2}\,r_1 \;+\; \lambda_2\,\varphi^{2,n}_{j+1/2}\,r_2$$

vous semble le plus adapté à la résolution de l'équation (3) par la méthode des volumes finis ? On a posé

(18) $$W^n_{j+1/2} \;=\; \begin{pmatrix} u^n_{j+1/2} \\ v^n_{j+1/2} \end{pmatrix} \;=\; \sum_{k=1}^{2} \varphi^{k,n}_{j+1/2}\,r_k \;=\; \varphi^{1,n}_{j+1/2}\,r_1 \;+\; \varphi^{2,n}_{j+1/2}\,r_2\,.$$

6) En calculant les variables caractéristiques $\varphi^{1,n}_{j+1/2}$ et $\varphi^{2,n}_{j+1/2}$ en fonction de $u^n_{j+1/2}$ et $v^n_{j+1/2}$, expliciter le schéma numérique obtenu à la question précédente sous la forme d'une relation permettant le calcul explicite de $u_{j+1/2}^{n+1}$ et $v_{j+1/2}^{n+1}$ en fonction de $u_{j+1/2}^{n}$, $v_{j+1/2}^{n}$, $u_{j-1/2}^{n}$, $v_{j-1/2}^{n}$, $u_{j+3/2}^{n}$ et $v_{j+3/2}^{n}$:

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} u_{j+1/2}^{n+1} \\ v_{j+1/2}^{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{j-1/2}^{n} \\ v_{j-1/2}^{n} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_{j+1/2}^{n} \\ v_{j+1/2}^{n} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_{j+3/2}^{n} \\ v_{j+3/2}^{n} \end{pmatrix} .$$

On précisera la valeur des matrices B, C et D.

7) Quelle condition reliant Δt, Δx et c_0 proposez-vous pour assurer que le schéma (19) est stable au sens suivant : si la suite $\{u_{j+1/2}^{0}, v_{j+1/2}^{0}, j \in \mathbb{Z}\}$ est bornée, il en est de même pour tous les instants ultérieurs : l'ensemble de valeurs $\{u_{j+1/2}^{n}, v_{j+1/2}^{n}, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est borné ?
Quel est l'ordre de précision du schéma (19) ?

FD, mai 1999, août 2002.