

Workshop conditions aux limites numériques: conditions non réfléchissantes en aéroacoustique

C. Bogey⁽¹⁾, C. Bailly⁽¹⁾ & J.-M. Clarisse⁽²⁾

⁽¹⁾ Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
Ecole Centrale de Lyon & UMR CNRS 5509
BP 163, 69134 Écully cédex, France.
christophe.bogey@ec-lyon.fr

⁽²⁾ CEA / DIF
BP 12, 91680 Bruyère-le-Châtel
jean-marie.clarisse@cea.fr

Dans ce premier workshop, deux problèmes sont proposés pour une géométrie bidimensionnelle. Ces cas peuvent s'étendre sans difficulté au 3-D, et n'imposent pas nécessairement la prise en compte de la viscosité. Il sera possible par la suite de traiter, par exemple, l'entrée d'une onde plane dans un écoulement de Poiseuille, en ayant une solution analytique de référence.

On aborde les deux types de situation suivants, proposés respectivement par l'ECL et le CEA :

- (i) la sortie non réfléchissante pour des perturbations acoustiques ou tourbillonnaires, en présence d'un écoulement moyen uniforme. Ces cas ne sont pas nouveaux dans la littérature¹⁻³ en 2-D, mais ils restent néanmoins incontournables pour caractériser les codes de simulation des équations de Navier-Stokes compressibles. On présente dans ces cas l'évolution temporelle de la norme L_2 de la fluctuation de pression sur le domaine de calcul. Cet indicateur permet de bien caractériser le champ acoustique résiduel, et de comparer l'efficacité des différentes formulations des conditions aux limites.
- (ii) l'entrée d'une onde plane dans le domaine de calcul, en présence ou non d'un écoulement uniforme. Cette situation se rencontre quand on souhaite étudier la réceptivité d'un l'écoulement à des perturbations acoustiques, calculer la diffraction d'une onde acoustique par un vortex ou encore lorsqu'on souhaite simuler numériquement un contrôle actif.

On se place dans le cadre de l'acoustique linéaire pour un fluide parfait, et la propagation est gouvernée par les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement stationnaire bidimensionnel supposé connu.

1 Problèmes 1

On utilise des variables adimensionnelles, normalisées par les échelles caractéristiques suivantes, respectivement de:

longueur	: $\Delta x_1 = \Delta x_2$
vitesse	: c_∞ (vitesse du son dans le milieu ambiant)
temps	: $\Delta x_1 / c_\infty$
masse volumique	: ρ_∞ (masse volumique du milieu ambiant)
pression	: $\rho_\infty c_\infty^2$

Le domaine de calcul est défini par $-50 \leq x_1, x_2 \leq 50$. Il y a donc $N = 101$ points dans chacune des directions du maillage. On définit aussi l'indicateur suivant basé sur la norme L_2 de la pression fluctuante:

$$L_p = \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} (p_{i,j} - p_0)^2 \right]^{1/2}$$

1.1 Impulsion de pression en écoulement uniforme

1.1.1 Définition

On considère la propagation d'une impulsion acoustique de forme Gaussienne dans un écoulement uniforme $\mathbf{u}_0 = (M, 0)$, de masse volumique et de pression moyennes uniformes de $\rho_0 = 1$ et $p_0 = 1/\gamma$ (γ rapport des chaleurs spécifiques), comme il est présenté sur la figure 1.

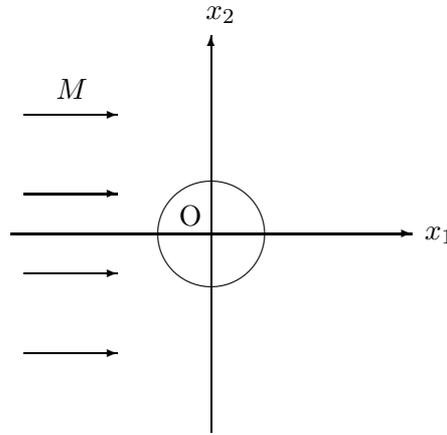


Figure 1: Impulsion de pression 2-D en écoulement.

À $t = 0$, on impose les conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= 1/\gamma + \epsilon \exp \left[-(\ln 2) \left(x_1^2 + x_2^2 \right) / b^2 \right] \\ \rho(\mathbf{x}) &= 1 + \epsilon \exp \left[-(\ln 2) \left(x_1^2 + x_2^2 \right) / b^2 \right] \\ u_1(\mathbf{x}) &= M \\ u_2(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

avec un nombre de Mach de $M = 0.5$, une demi-largeur de la Gaussienne de $b = 3$ et une amplitude de l'impulsion de pression de $\epsilon = 10^{-3}$.

On étudie les champs de pression aux trois instants $t = 40, 80$ et 120 , et l'évolution temporelle de l'indicateur L_p de $t = 0$ à $t = 200$.

1.1.2 Solution analytique

Ce problème admet comme solution:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma} + \frac{\epsilon}{2\alpha} \int_0^\infty \xi \exp[-\xi^2/4\alpha] \cos(c_0 t \xi) J_0(\xi \eta) d\xi$$

où $\eta = \sqrt{(x_1 - Mt)^2 + x_2^2}$, $\alpha = (\ln 2)/b^2$ et $J_0(z)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

1.2 Tourbillon en écoulement uniforme

1.2.1 Définition

On considère la convection d'un tourbillon de forme Gaussienne dans un écoulement uniforme $\mathbf{u}_0 = (M, 0)$, de masse volumique et de pression moyennes uniformes de $\rho_0 = 1$ et $p_0 = 1/\gamma$, comme il est présenté sur la figure 2.

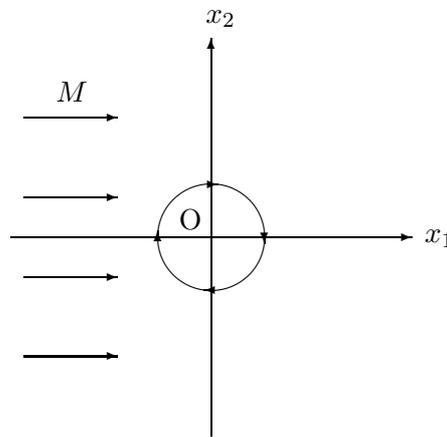


Figure 2: Tourbillon 2-D en écoulement.

À $t = 0$, on impose les conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= 1/\gamma \\ \rho(\mathbf{x}) &= 1 \\ u_1(\mathbf{x}) &= M + \epsilon x_2 \exp[-(\ln 2)(x_1^2 + x_2^2)/b^2] \\ u_2(\mathbf{x}) &= -\epsilon x_1 \exp[-(\ln 2)(x_1^2 + x_2^2)/b^2] \end{aligned}$$

avec un nombre de Mach de $M = 0.5$, une demi-largeur de la Gaussienne de $b = 5$ et une amplitude de la vitesse de $\epsilon = 0.03$.

On étudie les champs de pression aux trois instants $t = 50, 100$ et 150 , et l'évolution temporelle de l'indicateur L_p de $t = 0$ à $t = 200$.

1.2.2 Solution analytique

La solution analytique est simplement donnée par l'advection du tourbillon par l'écoulement moyen.

Une variante du problème consiste à prendre pour l'écoulement moyen $\mathbf{u}_0 = (M/\sqrt{2}, M/\sqrt{2})$, afin de faire sortir le tourbillon par l'un des coins du domaine de calcul (peu réaliste en pratique cependant).

2 Problèmes 2

2.1 Propagation d'une onde plane acoustique

On considère la propagation d'une onde acoustique plane de longueur d'onde λ dans un écoulement moyen uniforme dans la direction x_1 . Pour rendre les variables sans dimension, on utilise les échelles caractéristiques suivantes :

longueur	:	λ
vitesse	:	c_∞ (vitesse du son dans le milieu ambiant)
temps	:	λ/c_∞
masse volumique	:	ρ_∞ (masse volumique du milieu ambiant)
pression	:	$\rho_\infty c_\infty^2$

L'écoulement moyen étant caractérisé par son nombre de Mach M , l'onde acoustique considérée est définie par :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= 1/\gamma + \epsilon \cos \varphi(\mathbf{x}, t), \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= 1 + \epsilon \cos \varphi(\mathbf{x}, t), \\ u_1(\mathbf{x}, t) &= M + \epsilon \cos \alpha \cos \varphi(\mathbf{x}, t), \\ u_2(\mathbf{x}, t) &= \epsilon \sin \alpha \cos \varphi(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

avec :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 2\pi ((x_1 - M t) \cos \alpha + x_2 \sin \alpha - t)$$

où α est l'angle de la direction de propagation de l'onde par rapport à l'axe Ox_1 . Les domaines de calcul \mathcal{D}_α sont définis à partir de la valeur de l'angle α considérée, en l'occurrence :

1. Pour $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0 = [0, 1] \times [0, 1]$.
2. Pour $\alpha = \pi/6$, $\mathcal{D}_{\pi/6} = [0, 2/\sqrt{3}] \times [0, 2]$.
3. Pour $\alpha = \pi/3$, $\mathcal{D}_{\pi/3} = [0, 2] \times [0, 2/\sqrt{3}]$.

Les conditions aux limites sont :

- en $x_1 = 0$, condition de vitesse imposée :

$$u_1(x_2, t) = M + \epsilon \cos \alpha \cos \varphi(0, x_2, t), \quad u_2(x_2, t) = \epsilon \sin \alpha \cos \varphi(0, x_2, t);$$

- en $x_1 = \max_{\mathcal{D}_\alpha}(x_1)$, condition non réfléchissante ;
- en $x_2 = 0$ et $x_2 = \max_{\mathcal{D}_\alpha}(x_2)$, condition de périodicité par rapport à la variable x_2 .

Les conditions initiales sont données par l'onde plane ci-dessus à l'instant $t = 0$.

Le choix des résolutions spatiales en x_1 et x_2 est laissé libre. Les calculs sont effectués pour $\epsilon = 10^{-3}$ et deux valeurs du nombre de Mach : $M = 0$ et $M = 0.5$. Les résultats aux temps $t = 1$, $t = 10$, $t = 100$ sont comparés en norme L_2 à ceux obtenus pour des calculs identiques mais pour lesquels on a remplacé la condition non réfléchissante en $x_1 = \max_{\mathcal{D}_\alpha}(x_1)$ par une condition de périodicité par rapport à x_1 .

2.2 Convection d'un tourbillon

On propose une variante de la convection d'un tourbillon. Les conditions initiales sont données ici par :

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}) &= 1/\gamma, \\
 \rho(\mathbf{x}) &= 1, \\
 u_1(\mathbf{x}) &= \begin{cases} M + \epsilon \cos^4\left(\frac{\pi x_1}{4b}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{2b}\right) & , (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \\ M & , (x_1, x_2) \notin \mathcal{D}, \end{cases} \\
 u_2(\mathbf{x}) &= \begin{cases} -\epsilon 2 \cos^3\left(\frac{\pi x_1}{4b}\right) \sin\left(\frac{\pi x_1}{4b}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2b}\right) & , (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \\ 0 & , (x_1, x_2) \notin \mathcal{D}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

avec $\mathcal{D} = [-2b, 2b] \times [-2b, 2b]$, $b = 5$, $\epsilon = 0,03$. Les autres paramètres ainsi que les conditions de calcul sont identiques à ceux du cas du tourbillon de forme Gaussienne proposé au paragraphe 1.2.

Références

- ¹NASA, ICASE, 1995, Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics, edited by J.C. Hardin, J.R. Ristorcelli and C.K.W. Tam, NASA CP-3300.
- ²NASA, ICASE, 1997, Second computational aeroacoustics workshop on benchmark problems, edited by C.K.W. Tam and J.C. Hardin, NASA CP-3352.
- ³NASA, 1999, Third computational aeroacoustics workshop on benchmark problems, NASA CP-2000-209790.
- ⁴BOGEY, C. & BAILLY, C., 2002, Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases, accepted in *Acta Acustica*.