Conservatoire National des Arts et Métiers
Paris, 17 novembre 2006

Dérivation Fractionnaire en Mécanique
Etat-de-l'Art et Applications

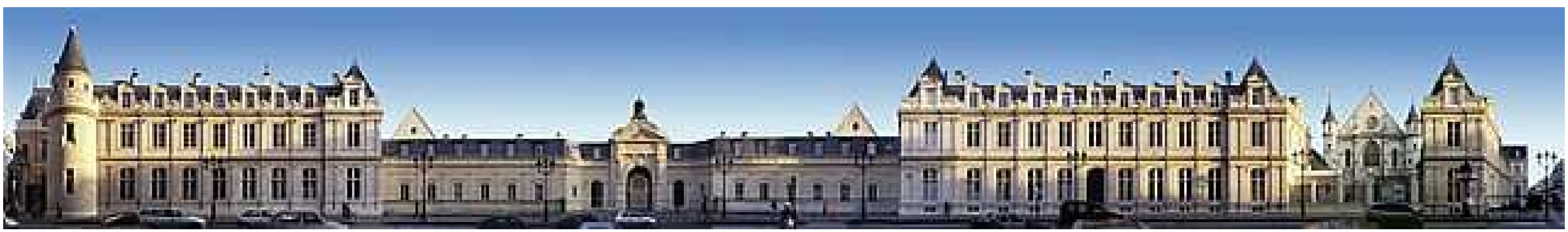
Journée Européenne

Accueil

François Dubois
CNAM Paris et Université Paris Sud, Orsay

CNAM : "Grand établissement" public de l'Etat
à caractère scientifique, culturel et professionnel,
sous la tutelle du ministère chargé de l'Enseignement supérieur.

Trois missions :
* formation tout au long de la vie,
* recherche technologique et l'innovation,
* diffusion de la culture scientifique et technique.



Réseau
* 150 centres de formation, 28 centres régionaux
* centres associés à l'étranger (Liban, Maroc, Espagne, Hongrie, Roumanie)
* 20 centres de l'Institut national des techniques économiques et comptables,
* 36 pays partenaires en Europe, au Maghreb, en Afrique, au Proche-Orient, en Asie, en Amérique latine.

Quatre pôles
* Economie et gestion,
* Sciences et techniques industrielles,
* Sciences et technologies de l'information et de la communication,
* Travail et société.

Une centaine de chaires, instituts et centres spécialisés.

Formation professionnelle des adultes tout au long de la vie.

* 1 200 unités d'enseignement proposées
* 400 diplômes, titres ou certificats, de bac+2 à bac+8
* 86 000 auditeurs inscrits dans l'ensemble du réseau
* un auditeur sur 10 se forme à distance

Recherche

Brevets, essais, innovation, transfert de technologies, incubation d'entreprises

* une école doctorale de site et 8 écoles doctorales partenaires
* plus de 30 équipes de recherche
* 330 doctorants, 190 thèses.

Culture scientifique et technique

Musée des arts et métiers, bibliothèque, réseau documentaire et numérique

* 50 000 participants aux conférences
* 200 000 visiteurs au Musée des arts et métiers
* 300 000 visiteurs du "Conservatoire numérique" sur Internet.

Problème modèle : équation de la chaleur à une dimension d'espace

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t)\,, \quad 0 < y < \infty\,, \quad t > 0$$

condition limite à gauche : $u(y = 0,\, t) = 0\,, \qquad t > 0$

condition limite à droite : $\dfrac{\partial u}{\partial y}(y \longrightarrow \infty,\, t) = 0\,, \quad t > 0$

condition initiale : $u(y,\, t = 0) = 0\,, \qquad y > 0\,.$

On peut résoudre ce problème de manière analytique !

Outil : transformée de Fourier pas si simple à calculer :

$H(t)$: fonction de Heaviside $\quad H(t) = 1$ si $t > 0\,,\ H(t) = 0$ si $t < 0$

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\, H(t)\ . \qquad \text{Alors} \qquad \widehat{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{i\,\omega}}\,.$$

On fait une transformation de Fourier en temps de l'équation d'évolution :

$$u(y,\, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(y,\, \omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, \mathrm{d}\omega\,. \qquad \text{Donc} \qquad i\omega\, \widehat{u} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2} = \widehat{f}\,.$$

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne dépend pas de y :

$$\widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{i\,\omega} + a \exp\big(\sqrt{i\,\omega}\, y\big) + b \exp\big(-\sqrt{i\,\omega}\, y\big)$$

La partie réelle de $\sqrt{i\,\omega}$ est strictement positive ;

donc $\exp\big(\sqrt{i\,\omega}\, y\big) \longrightarrow \infty$ si $y \longrightarrow \infty$. Exclu pour $\widehat{u}$ donc $a = 0$.

On utilise la condition limite $\quad u(y=0) = 0$

$$\text{d'où} \qquad \widehat{u} = \frac{\widehat{f}}{i\,\omega} \Big(1 - \exp\big(-\sqrt{i\,\omega}\, y\big)\Big)$$

$$\text{et} \qquad \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} = \frac{\widehat{f}}{\sqrt{i\,\omega}} \exp\big(-\sqrt{i\,\omega}\, y\big)\,.$$

On en déduit pour $y = 0$: $\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial y}(y=0) = \dfrac{\widehat{f}}{\sqrt{i\,\omega}} = \widehat{f}\ \widehat{K}$ puis

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) = f * K = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, K(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,\frac{H(t-\theta)}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(\theta)}{\sqrt{t-\theta}}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Définition de l'intégrale d'ordre un demi de la fonction f

$$\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{f(\theta)}{\sqrt{t-\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Propriété intéressante : $\mathrm{I}^{1/2}\Big(\mathrm{I}^{1/2} f\Big)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

Définition de Riemann-Liouville (1840) : $\big(\mathrm{D}^{1/2} f\big) \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t)\,.$

La dérivation d'ordre un demi vérifie la relation fonctionnelle

$$\mathrm{D}^{1/2}\Big(\mathrm{D}^{1/2} f\Big)(t) \,=\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comment approcher un tel objet ?

Idée de Grünwald et Letnikov (1890) :

remplacer f par une approximation aux différences finies :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \approx \frac{1}{h}\,\big(f(t) - f(t-h)\big) \,\equiv\, \frac{1}{h}\,\big((\mathrm{Id} - \delta_h^-)f\big)(t)\,.$$

Puis on développe la racine carrée en série formelle de l'opérateur δ_h^- :

$$\sqrt{\frac{1}{h}\,\big(\mathrm{Id} - \delta_h^-\big)} \,=\, \frac{1}{\sqrt{h}}\Big(\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\,\delta_h^- - \frac{1}{8}\,(\delta_h^-)^2 - \ldots\Big)$$

Un schéma classique très populaire !!

Point de vue mathématique : espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire,
par exemple, $H^{1/2}(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,,\ \sqrt{|\,\omega\,|}\,\widehat{f}(\omega) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,\}$.
Rappelons que l'on a aussi $H^1(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,,\ |\,\omega\,|\ \widehat{f}(\omega) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\,\}$

On sait définir la notion de "fonction une demi fois dérivable",
sans avoir à calculer la dérivée d'ordre un demi !!

Résultat fondamental : théorème de Lions-Magenes (1960)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière "assez régulière".
Soit u une "fonction dérivable" (au sens moderne) : $u \in H^1(\Omega)$.
Alors on peut définir de façon continue des "valeurs au bord"
de la fonction u, la "trace" γu de u.
La trace γu appartient toujours à l'espace fractionnaire $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On peut dériver "une demi fois" le long du bord
une fonction dérivable "à l'intérieur".

Matinée :

Denis Matignon (Paris)

Yvon Chevallier et Tibi Beda (Saint Ouen, Yaoundé)

Après-midi

Thomas Hélie (Paris)

Kai Diethelm (Braunschweig)

Ana Cristina Galucio (Paris)

Alain Le Méhauté (le Mans)

discussion finale.