

Quelques variantes de la formulation éléments finis mixtes hybrides

Ph. Ackerer, A. Younes

ackerer@imfs.u-strasbg.fr

Institut de Mécanique des Fluides et des Solides de Strasbourg

- **La méthode des EFMH**
- **Réduction du nombre d'inconnues**
- **Condensation de masse**

➤ **Résolution de l'EDP (conservation de la masse, loi de Darcy, CI & CL)**

$$\begin{aligned}
 c \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} &= f & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\
 \vec{q} &= -a \nabla P & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\
 P &= P_0 & \text{sur } \Omega \\
 P &= P_D & \text{sur } \Gamma^D \times]0, T[\\
 \vec{q} \cdot \vec{\eta} &= q_N & \text{sur } \Gamma^N \times]0, T[
 \end{aligned}$$

P : charge [L]

\vec{q} : vitesse de Darcy [L/T]

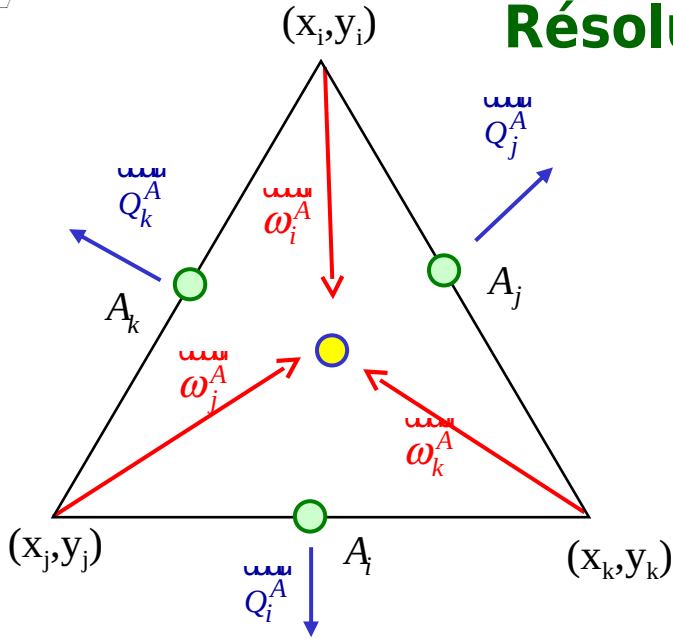
f : terme puits/source [1/T]

a : conductivité hydraulique [L/T]

c : coefficient d'emmagasinement [1/L]

$\vec{\eta}$: vecteur unitaire normal

Résolution avec les EFMH



- Valeur de P^A
- Valeur de P et du gradient

- P^A \square \square la valeur moyenne de P sur A
- TP_i^A \square \square la valeur moyenne de P sur
- \overline{q}_A \square \overline{X}_A l'approximation de $\overline{q} = -a \square P$ sur A

✓ \overline{X}_A l'espace RT0

$$\overline{q}_A = \sum_{i=1}^3 Q_i^A \omega_i^A$$

✓ Pour les triangles, une base de \overline{X}_A est

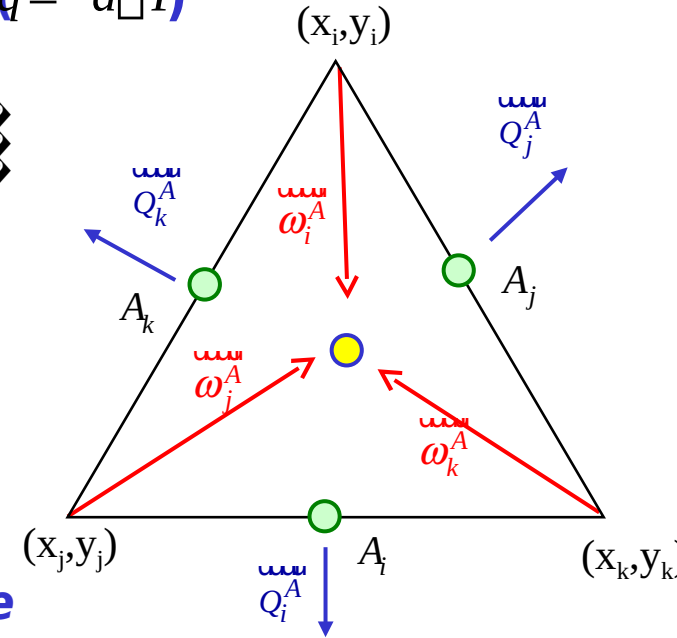
$$\omega_i^A = \frac{1}{2|A|} \begin{pmatrix} x - x_i^A \\ y - y_i^A \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

1) L'écriture variationnelle de la loi de Darcy $\vec{q} = -a \nabla P$

$$\int_A \omega_i^A \vec{q} \cdot \vec{n}_i = \sum_{j=1}^3 Q_j^A \int_A \omega_j^A \vec{q} \cdot \vec{n}_j = a \int_A \nabla P \cdot \vec{n}_i = a \int_A \nabla P \cdot \vec{n}_i - \int_A \nabla P \cdot \vec{n}_i$$

qui s'écrit $Q_i^A = a \sum_{j=1}^3 B_{ij}^{-1} \int_A \nabla P \cdot \vec{n}_j$

$$B_{ij} = \int_A \omega_i^A \cdot \omega_j^A$$



✓ B^{-1} est une matrice élémentaire **définie positive**

$$B^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} r_{jk} r_{jk} & r_{jk} r_{ki} & r_{jk} r_{ij} \\ r_{jk} r_{ki} & r_{ki} r_{ki} & r_{ij} r_{ki} \\ r_{jk} r_{ij} & r_{ij} r_{ki} & r_{ij} r_{ij} \end{pmatrix} + \frac{1}{3|A|} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B^{-1}| = \sum_{j=1}^3 B_{ij}^{-1} = \frac{|ij| + |ik| + |jk|}{48|A|} \square \sqrt{3}/12$$

2) Discrétisation implicite de l'équation de conservation de la masse

$$\frac{c|A|}{\Delta t} (P^{A,n+1} - P^{A,n}) + \sum_{j=1}^3 Q_j^{A,n+1} = |A| f_A = Q_s^A$$

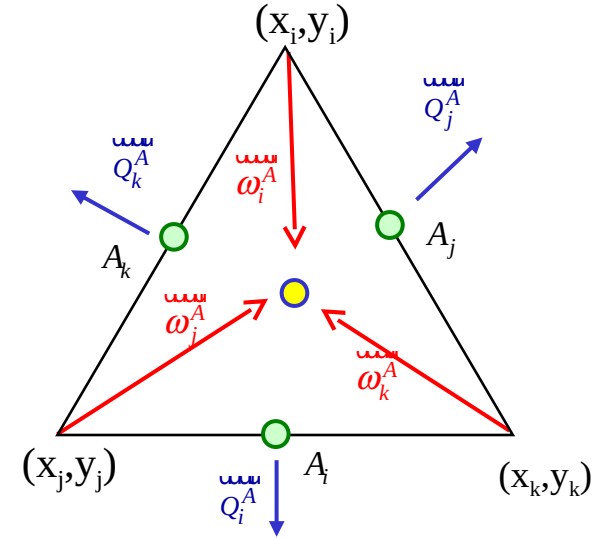
3) Hybridation

$$P^{A,n+1} = \frac{a}{\beta} \sum_{i=1}^3 \alpha_i TP_i^{A,n+1} + \frac{\lambda}{\beta} P^{A,n} + \frac{Q_s^A}{\beta}$$

$$Q_i^{A,n+1} = a \frac{\alpha_i}{\beta} \sum_{j=1}^3 \alpha_j TP_j^{A,n+1} - \sum_{j=1}^3 B_{ij}^{-1} TP_j^{A,n+1} + \frac{\lambda \alpha_i}{\beta} P^{A,n} + \frac{\alpha_i Q_s^A}{\beta}$$

Continuité des Pressions $TP_i^A = TP_i^B$ et des flux entre deux éléments A et B

$$Q_i^{A,n+1} + Q_i^{B,n+1} = 0$$



Formulation standard

$$P^A = \frac{1}{S^A + 3} \left(TP_1^A + TP_2^A + TP_3^A + F^A + S^A P^{A_{n-1}} \right)$$

$$Q_i^A = \prod_{j=1}^3 \left(B_{ij}^A \right)^{-1} \left(P^A - TP_j^A \right)$$

Nouvelle formulation

Trouver une **nouvelle variable H (par élément)** tq :

$$H^A = \pi_1^A TP_1^A + \pi_2^A TP_2^A + \pi_3^A TP_3^A$$

$$Q_i^A = \xi_i^A \left(H^A - \beta_i^A TP_i^A \right) + \gamma_i^A$$

Les coefficients sont obtenus par identification

Remarque : Le système précédent n'est pas linéairement indépendant.
Un coefficient est à définir a priori.

Nouvelle formulation

$$H^A = \pi_1^A TP_1^A + \pi_2^A TP_2^A + \pi_3^A TP_3^A$$

$$Q_i^A = \xi_i^A (H^A - \beta_i^A TP_i^A) + \gamma_i^A$$

Continuité des flux et charges

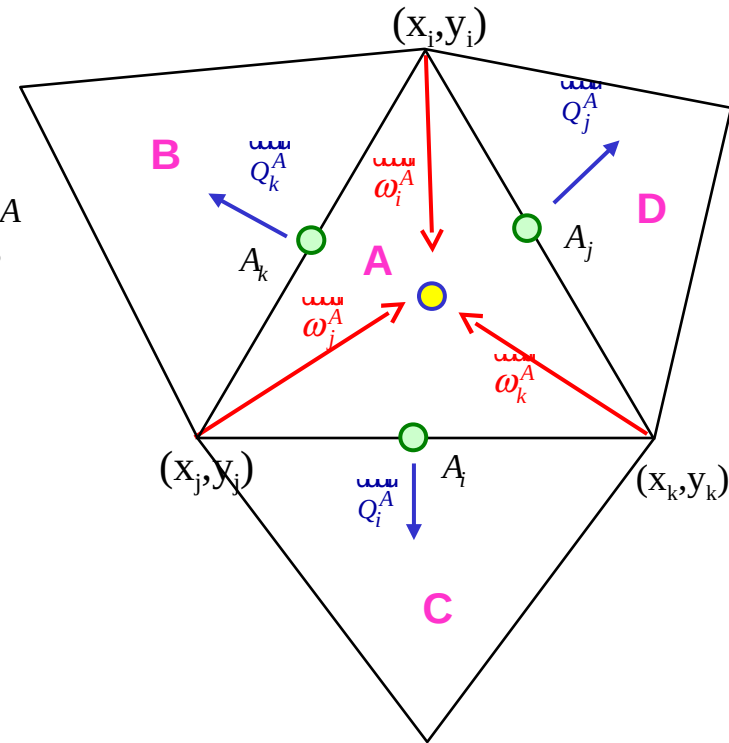
$$Q_k^A + Q_{k'}^B = 0$$

$$TP_k^A = TP_{k'}^B$$

Forme discrétisée complète

$$H^A \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\lambda_i^A \xi_i^A}{b_{AB}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\lambda_j^A \xi_j^A}{b_{AC}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\lambda_k^A \xi_k^A}{b_{AD}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} + \frac{\lambda_i^A \xi_i^B}{b_{AB}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} H^B + \frac{\lambda_j^A \xi_j^C}{b_{AC}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} H^C + \frac{\lambda_k^A \xi_k^D}{b_{AD}} \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} H^D =$$

$$-\lambda_i^A \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \chi^A + \chi^B \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} - \lambda_j^A \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \chi^A + \chi^C \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} - \lambda_k^A \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix} \chi^A + \chi^D \begin{matrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{matrix}$$



$$\begin{aligned}
 H^A & \frac{\lambda_i^A \xi_i^A}{b_{AB}} + \frac{\lambda_j^A \xi_j^A}{b_{AC}} + \frac{\lambda_k^A \xi_k^A}{b_{AD}} + \frac{\lambda_l^A \xi_l^A}{b_{AB}} H^B + \frac{\lambda_j^A \xi_j^C}{b_{AC}} H^C + \frac{\lambda_k^A \xi_k^D}{b_{AD}} H^D = \\
 & -\lambda_i^A \frac{\chi^A + \chi^B}{b_{AB}} - \lambda_j^A \frac{\chi^A + \chi^C}{b_{AC}} - \lambda_k^A \frac{\chi^A + \chi^D}{b_{AD}}
 \end{aligned}$$

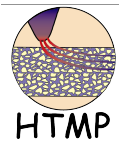
Le cas elliptique (avec ou sans termes puits source)

$$\frac{\lambda_i^A \xi_i^B}{b_{AB}} = \frac{\lambda_i^B \xi_i^A}{b_{BA}} = \frac{\xi_i^A \xi_i^B}{\xi_i^A + \xi_i^B} \quad \text{avec} \quad \xi_i^A = \frac{2a^A}{\cot g\theta_i^A}$$

La matrice est symétrique. Elle est définie positive si

$$\frac{2}{\frac{\cot g\theta_i^B}{a^B} + \frac{\cot g\theta_i^A}{a^A}} + \frac{2}{\frac{\cot g\theta_j^C}{a^C} + \frac{\cot g\theta_j^A}{a^A}} + \frac{2}{\frac{\cot g\theta_k^D}{a^D} + \frac{\cot g\theta_k^A}{a^A}} > 0$$

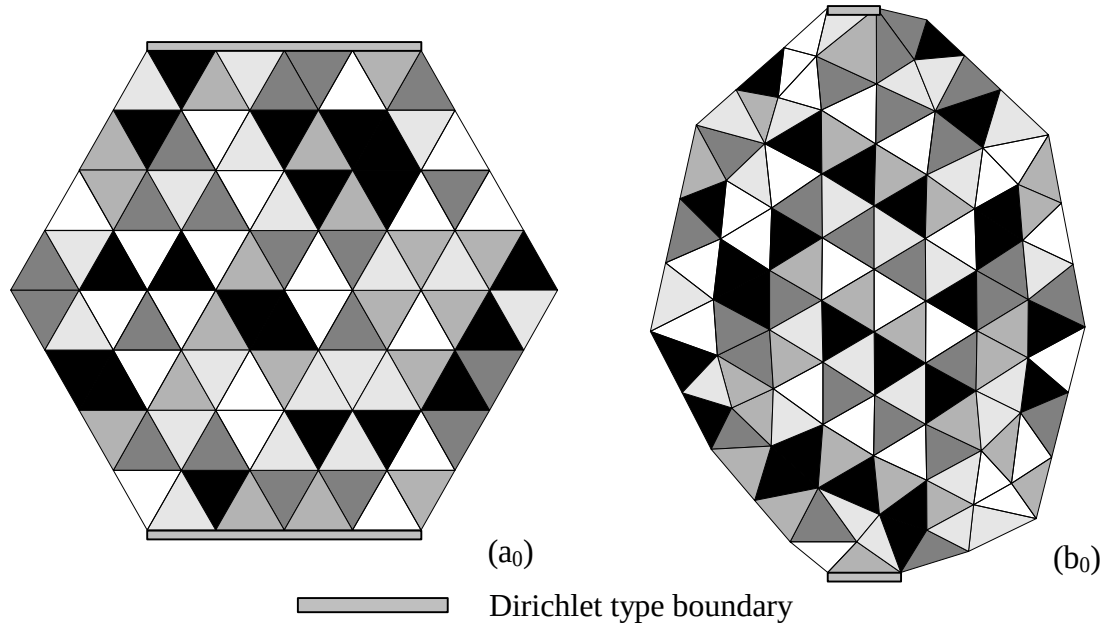
Dans le cas du problème elliptique sans terme puits source,
H peut être interprété comme la charge au centre du cercle circonscrit.








Le cas parabolique (avec ou sans termes puits source)

La **matrice** est généralement non symétrique et non définie positive.

Dans le cas de triangles équilatéraux, la **matrice** est définie positive. Elle peut être rendue symétrique avec un choix adéquat du coefficient choisi a priori (un coef. par élément).



	k_x	ϕ
	2	$\pi/5$
	0.2	$\pi/3$
	1	$\pi/2$
	0.02	$\pi/5$
	0.01	$3\pi/4$

$$\mathbf{K}^A = \begin{bmatrix} k_x^A & k_{xy}^A \\ k_{xy}^A & k_y^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x^A & 0 \\ 0 & k_y^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

mesh	k_Y/k_X	MFE					H resolution							
		unkn	PCG		Dir._Solv	Matrix	unkn	neg	PCG		PSYMLQ		Dir._Solv	Matrix
			CPU	nb iter					CPU	CPU	nb iter	CPU		
(a ₀)	0.4	156	0.03	70	0.008	pos.def.	96	0	0.016	34	0.03	80	0.006	pos.def.
(a ₁)		600	0.2	118	0.04	pos.def.	384	0	0.1	89	0.33	231	0.02	pos.def.
(a ₂)		2352	1.6	230	0.16	pos.def.	1536	0	0.86	217	2.37	395	0.1	pos.def.
(a ₃)		9312	13.35	458	0.78	pos.def.	6144	0	7.4	453	18.6	740	0.49	pos.def.
(a' ₀)	0.2	156	0.04	92	0.008	pos.def.	96	44	0.03	85	0.05	142	0.006	indefinite
(a' ₁)		600	0.3	174	0.04	pos.def.	384	234	1	1092	0.77	552	0.02	indefinite
(a' ₂)		2362	2.23	314	0.15	pos.def.	1536	1070	*	*	8	1326	0.1	indefinite
(a' ₃)		9312	17.75	592	0.78	pos.def.	6144	4590	*	*	67.5	2788	0.49	indefinite
(b ₀)	0.1	200	0.09	152	0.01	pos.def.	125	38	0.07	200	0.1	235	0.008	indefinite
(b ₁)		775	0.69	289	0.05	pos.def.	500	240	*	*	3.8	2024	0.03	indefinite
(b ₂)		3050	4.8	510	0.2	pos.def.	2000	1260	*	*	74.4	9405	0.14	indefinite
(b ₃)		12100	38	950	1.2	pos.def.	8000	5844	*	*	384	12147	0.63	indefinite
(b ₄)	1	48200	348	2131	6.5	pos.def.	32000	1213	*	*	1054	7983	3.75	indefinite
(b' ₄)	0.1	48200	530	3225	6.4	pos.def.	32000	14593	*	*	*	*	3.9	indefinite

Table 1 : CPU time, iterations number for different solvers versus the number of unknowns for each mesh.

* Convergence not reached after 20000 iterations
 neg : number of elements that not verify property (36)

➤ Propriétés des EFMH

- La charge P et la vitesse \vec{q} sont approchées simultanément
- La masse est conservée localement
- Continuité des flux et des charges sur les facettes de chaque maille
- Résolution en traces de charge : matrice $(nf \times nf)$ symétrique définie positive
- La matrice obtenue n'est en général pas une M-matrice

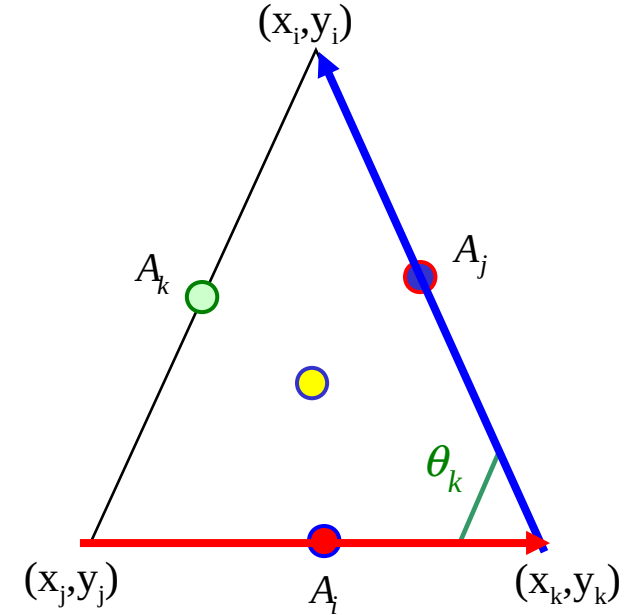
✓ *La propriété de M-matrice* garantit *le principe du maximum discret* : Dans un domaine sans terme puits/source, il ne peut y avoir de maximum ou de minimum local dans la solution en P obtenue.

Matrice des EFMH

➤ Le terme sur la diagonale

$$m_{ii} = m_{ii}^A + m_{ii}^B$$

$$m_{ii}^A = a \frac{\mathbf{r}_{jk} \mathbf{r}_{jk}}{|A|} + a \frac{1}{3|A|} - \frac{1}{3|A| + \frac{\lambda}{a}|A|^2} \mathbf{r}_{jk} \mathbf{r}_{jk} > 0$$



➤ Le terme hors diagonale

$$m_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{jk} \mathbf{r}_{ki}}{|A|} + \frac{1}{3|A|} - \frac{a}{\beta|A|^2} = -2 \cot \theta_k \frac{\mathbf{r}_{jk} \mathbf{r}_{ki}}{|A|} + \frac{1}{3} \frac{\lambda}{3a + \lambda}$$

$$\lambda = \frac{c|A|}{\Delta t}$$

$$m_{ii} > 0 \quad \& \quad m_{ij} \leq 0 \quad ?$$

Régime permanent ($\lambda = 0$)

$m_{ij} \leq 0$	si	$\theta_k \leq 90^\circ$
-----------------	----	--------------------------

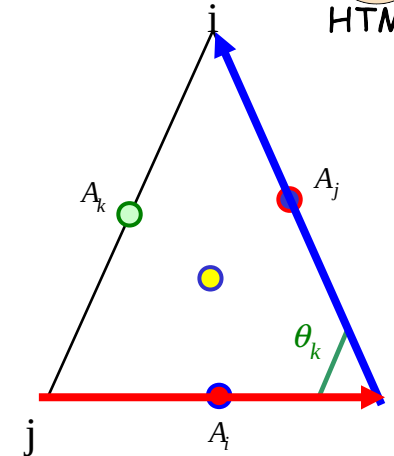
$m_{ij} > 0$	si	$\theta_k > 90^\circ$
--------------	----	-----------------------

Régime transitoire ($\lambda \neq 0$)

$m_{ij} \leq 0$	si	$0^\circ \leq \theta_k \leq 40.89^\circ$ ($\tan(\theta_k) < 6$)
-----------------	----	---

$m_{ij} \leq 0$	si	$40.89^\circ \leq \theta_k \leq 90^\circ$ & $\Delta t \leq \Delta t_c$
-----------------	----	--

$m_{ij} > 0$	si	$\theta_k > 90^\circ$
--------------	----	-----------------------



$$\Delta t_c = c \left| A \right| \frac{tg \theta_k - 6}{18a}$$

➤ Pour une triangulation à angles aigus, les EFMH donnent une M-matrice

Dans le cas du régime permanent

Dans le cas du régime transitoire si $\Delta t \leq \Delta t_c$

Remarques

1. L'utilisation d'une **approximation** permet de **diagonaliser la matrice élémentaire B** et abouti ainsi à une procédure de condensation de masse (**triangle ou rectangle**).
2. Dans le cas du **régime permanent**, le système en TP obtenu en écrivant la continuité des flux avec les **EFMH** est le même qu'avec les $P_{nc,0}^1$
 - ⇒ La pression et la vitesse peuvent être approchés en deux étapes :
 - ✓ P est approchée via la méthode des éléments finis non conformes .
 - ✓ Ensuite, la vitesse est approchée dans chaque éléments via l'espace RT_0

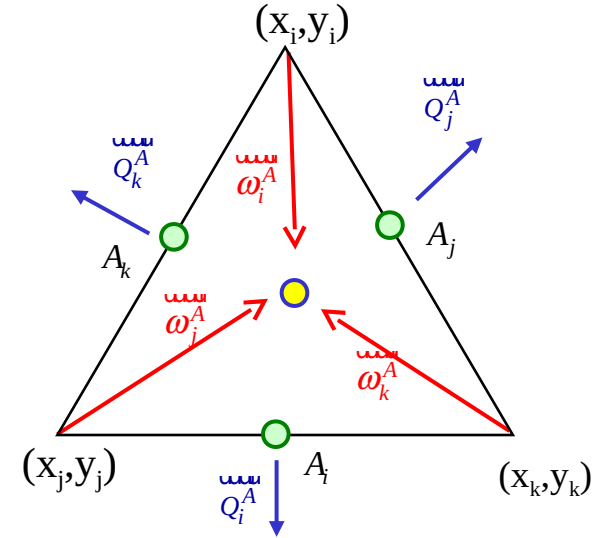
La méthode EFMH avec condensation de masse

Sur l'élément A q_A l'espace RT_0

$$q_A = \sum_{i=1}^3 Q_i^A \omega_i^A$$

Le flux sur chaque facette A_i est donné par

$$Q_i^A = \bar{Q}_i^A + \frac{|A|}{3} f_A - c \frac{|A|}{3} \frac{TP_i}{\Delta t}$$



\bar{Q}_i^A correspond au cas stationnaire sans terme puits/source :

$$\bar{Q}_i^A = a \frac{\alpha_i}{\alpha} \sum_{j=1}^3 \alpha_j TP_j - a \sum_{j=1}^3 B_{ij}^{-1} TP_j = a \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j}{\alpha} - B_{ij}^{-1} TP_j$$

Continuité des charges ($TP_i^A = TP_i^B$) et des flux entre deux éléments A et B

$$Q_i^A + Q_i^B = \bar{Q}_i^A + \frac{|A|}{3} f_A - c_A \frac{|A|}{3} \frac{TP_i^A}{\Delta t} + \bar{Q}_i^B + \frac{|B|}{3} f_B - c_B \frac{|B|}{3} \frac{TP_i^B}{\Delta t} = 0$$

Matrice des EFMHC

➤ Le terme sur la diagonale

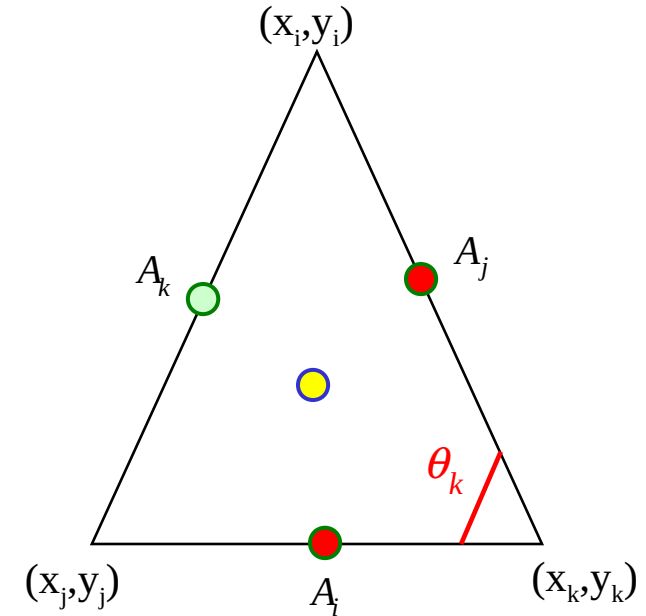
$$m_{ii} = m_{ii}^A + m_{ii}^B$$

$$m_{ii}^A = a \frac{r_{jk} r_{jk}}{|A|} - \frac{\alpha_i^2}{\alpha} \frac{c_A |A|}{3\Delta t}$$

➤ Le terme hors diagonale

$$m_{ij}^A = -2a \cot(\theta_k)$$

$$(EFMH) \quad m_{ij} = -2 \cot \theta_k + \frac{1}{3} \frac{\lambda}{3a + \lambda} \quad \lambda = \frac{c|A|}{\Delta t}$$



Régime permanent ($c = 0$)

$$m_{ij} \leq 0 \quad \text{si} \quad \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$$

$$m_{ij} > 0 \quad \text{si} \quad \theta_k > \frac{\pi}{2}$$

Régime transitoire

$$m_{ij} \leq 0 \quad \text{si} \quad \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$$

$$m_{ij} > 0 \quad \text{si} \quad \theta_k > \frac{\pi}{2}$$

Expériences numériques

$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial x} = 0$	in	$\Omega_{0,T}$
$q = -aP$	in	$\Omega_{0,T}$
$P(x,0) = 0$	in	Ω
$P = 1$	on	Ω_D^1
$P = 0$	on	Ω_D^2
$q\eta = 0$	on	Ω_N

$\Omega_N = 0$

$c = 1$

$a = 1$

$\Delta t = T = 0.005$

$\Omega_D = 1$ $\Omega_D = 0$

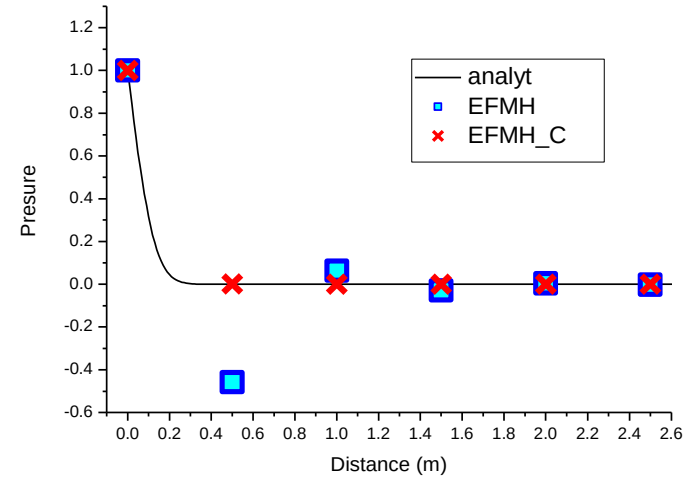
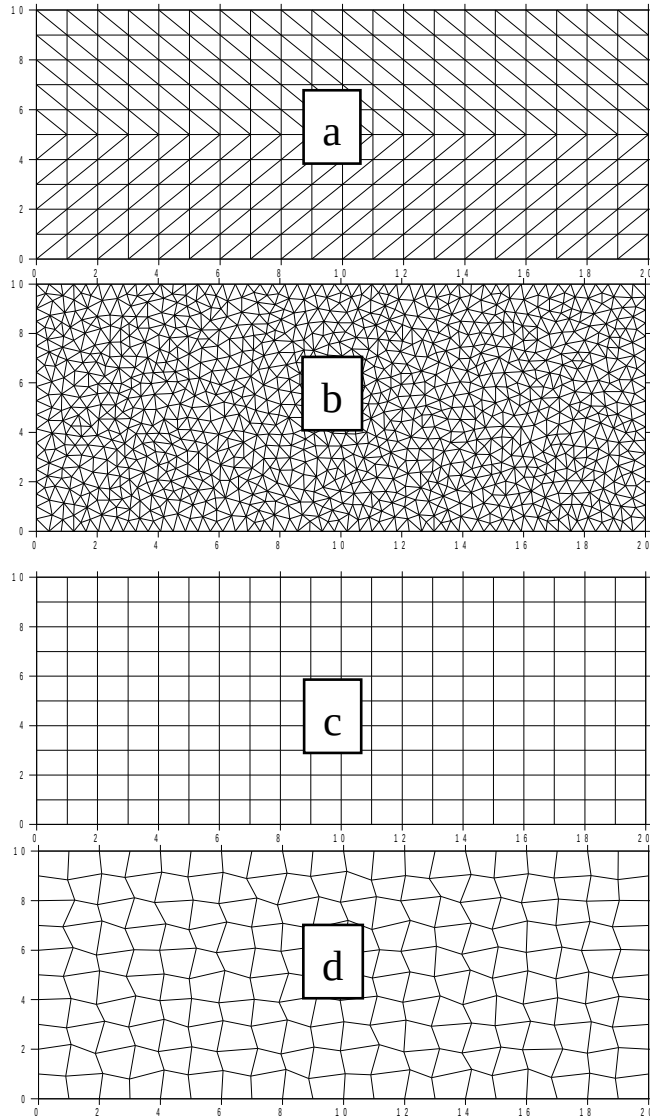
$\Omega_N = 0$

Domaine et CL

Solution analytique

$$P(x,y,t) = \frac{x}{(16\pi a)^{1/2}} \int_0^t \delta\tau^{-3/2} \operatorname{erf} \left(\frac{4+y}{4a\tau} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{4-y}{4a\tau} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{4a\tau} \right) d\tau$$

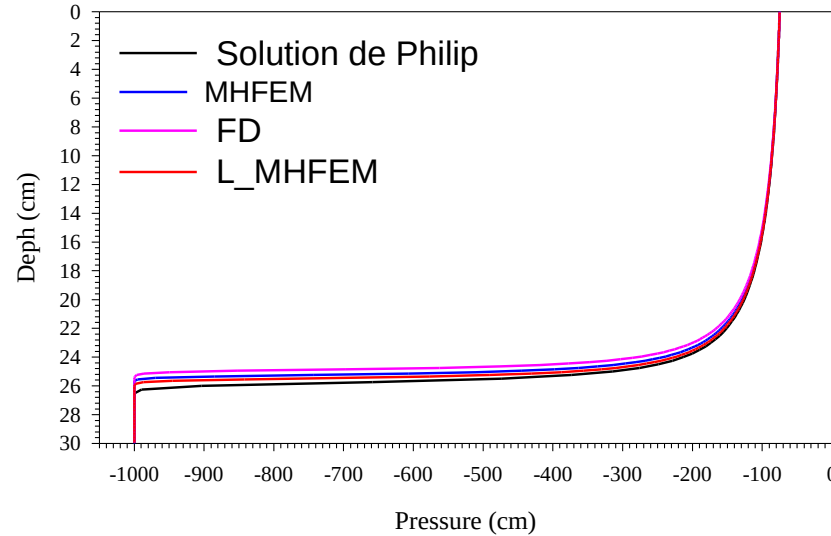
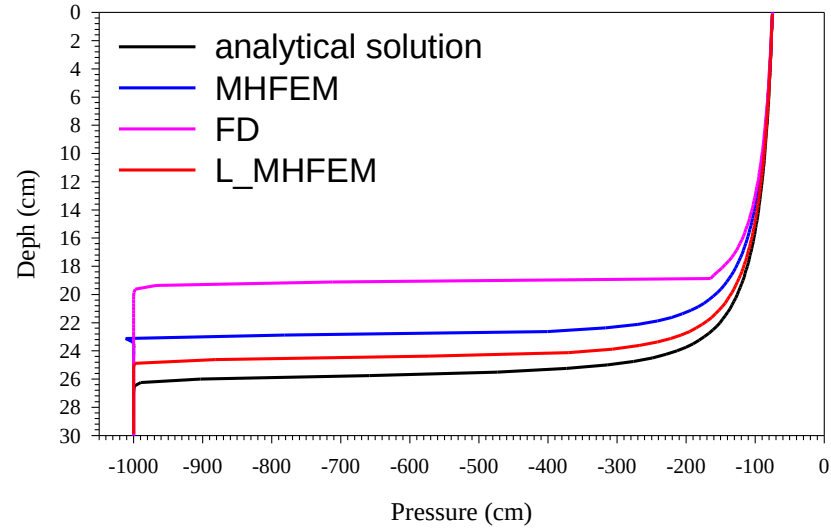
Résultats



	Δt	0.001		0.5	
		Pmin	Erreur	Pmin	Erreur
Mesh a	EFMH	-0.49	3.10^{-3}	0.00	1.10^{-2}
	EFMH_C	0.00	5.10^{-5}	0.00	1.10^{-2}
Mesh b	EFMH	-0.16	5.10^{-4}	0.00	1.10^{-2}
	EFMH_C	0.00	1.10^{-4}	0.00	1.10^{-2}
Mesh c	EFMH	-0.26	5.10^{-3}	-7.10^{-3}	9.10^{-3}
	EFMH_C	-9.10^{-4}	9.10^{-5}	0.00	8.10^{-3}
Mesh d	EFMH	-0.27	5.10^{-3}	0.00	9.10^{-3}
	EFMH_C	-1.10^{-3}	1.10^{-4}	0.00	8.10^{-3}

Écoulement en milieux non saturés

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} = 0$$



Conclusion : La formulation à une inconnue

1. Nous avons construit une **formulation** pour la MEFM appliquée aux triangles. Le **nombre d'inconnues** avec cette formulation est le **nombre total d'élément** pour le problème elliptique et parabolique pour une triangulation quelconque.
2. Pour le problème elliptique avec termes puits source (la plupart des cas étudiés), on obtient une **matrice symétrique qui peut être définie positive**. Dans ce cas, **la nouvelle formulation est très attractive en terme de temps CPU**.
3. Pour le problème parabolique, la **matrice** est, en général, **non symétrique et non définie positive**.
4. La méthode peut être étendue aux tétraèdres réguliers.

Conclusion : Les EFMHC

1. Les EFMHC donnent toujours **une matrice symétrique définie positive** (solveurs itératifs).
2. Les EFMHC donnent **une M-matrice** uniquement dans le cas **d'une triangulation à angles aigus**.
3. Les EFMHC peuvent être utilisés dans le cas où **la conductivité est un tenseur plein**.
4. Les EFMHC sont **simples à implémenter** dans les codes basés sur les EFMH .