Schéma numérique BGK discret pour le modèle d'Euler bitempérature en 2D

D. Aregba-Driollet

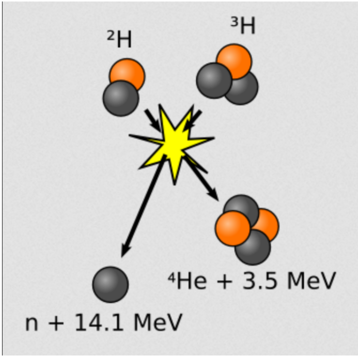
Institut de Mathématiques de Bordeaux

Collaborations:

- Stéphane Brull (IMB)
- Corentin Prigent dans le cadre de sa these IMB et CELIA (correspondant: Bruno Dubroca).

Le contexte physique

Expérience de fusion par confinement intertiel



Pour cela : lasers très puissants qui font vaporiser l'échantillon sous forme de plasma.

Le contexte physique

- Confinement de la matière dans un très petit volume
- Très hautes températures : 10^7 K
- Echelle de temps : 10^{-9} secondes
- Pendant un court laps de temps la température des ions diffère de celle des électrons

Le modèle

Système d'Euler pour un mélange avec ionisation $Z = \frac{n_e}{n_i}$ constante (quasi-neutralité)

Notations: *e*: électrons, *i*: ions.

- c_e, c_i: fractions massiques

$$\rho_e = \rho c_e = m_e n_e, \quad \rho_i = \rho c_i = m_i n_i, \quad c_e + c_i = 1.$$

  Conséquence: c_e et c_i sont constantes.

- $u = u_e = u_i$ (vitesses à l'équilibre)
- Energies ioniques and électroniques (températures hors équilibre)

$$\mathcal{E}_\beta = \rho_\beta \varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\rho_\beta u^2, \quad \beta = e, i.$$

Système d'Euler non conservatif à deux espèces

2 lois de pression et 2 températures:

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha, \quad \alpha = e, i.$$

Les équations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x p_e + \nabla_x p_i = 0, \\ \partial_t \mathcal{E}_e + \nabla_x \cdot (u(\mathcal{E}_e + p_e)) - u \cdot (c_i \nabla_x p_e - c_e \nabla_x p_i) = \nu_{ei}(T_i - T_e), \\ \partial_t \mathcal{E}_i + \nabla_x \cdot (u(\mathcal{E}_i + p_i)) + u \cdot (c_i \nabla_x p_e - c_e \nabla_x p_i) = -\nu_{ei}(T_i - T_e), \end{cases}$$

[Coquel, Marmignon, 1998], [Coquel, Chalons, 2005]
Système non conservatif avec termes sources.

Si $\gamma_e = \gamma_i$ alors $(\rho, \rho u, \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i)$ satisfait le système d'Euler

Propriétés

- Hyperbolicité: diagonalisable avec trois valeurs propres $u \cdot \omega$, $u \cdot \omega \pm a$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma_e p_e + \gamma_i p_i}{\rho}}$$

- [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Estibals, Dubroca, 2018] Existence d'une entropie dissipative strictement convexe

$$\eta = \sum_{\alpha=e,i} \left(-\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha(\gamma_\alpha - 1)} \ln \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}} \right), \quad Q = u\eta.$$

Pour les solutions régulières

$$\partial_t \eta + \mathrm{div} Q = -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e} (T_i - T_e)^2$$

Solutions fortes : l'entropie ne fournit pas un symétriseur.

Rappel: pour un système hyperbolique sous forme divergentielle

$$\partial_t U + \mathrm{div} F(U) = Q(U)$$

Si η est une entropie strictement convexe $\eta''(U)F'_d(U)$ est symétrique pour tout $d = 1, \ldots, D$.

Ici : $\partial_t U + \sum_{d=1}^{D} A_d(U)\partial_d U = Q(U)$ avec $A_d(U) \neq F'_d(U)$. Même pour $D = 1$

$\eta''(U)A(U)$ est symétrique si et seulement si $T_i = T_e$.

Solutions fortes(suite)

[Aregba-Driollet, Brull, Peng 2021]:

- Existence d'un symétriseur (et donc existence locale des solutions régulières)
- En 1D pour $\gamma_i \neq \gamma_e$: existence globale des solutions régulières pour le problème de Cauchy à données petites

Symétriseur pour Euler en variables (ρ, u, ε):

$$B_0 = diag\left(\frac{(\gamma - 1)\varepsilon}{\rho^2}, 1, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Symétriseur pour Euler bitempérature en variables $(\rho, u, \varepsilon_e, \varepsilon_i)$:

$$B_0 = diag\left(\frac{1}{\rho^2}\sum_{\alpha=e,i} c_\alpha(\gamma_\alpha - 1)\varepsilon_\alpha, 1, \frac{c_e}{\varepsilon_e}, \frac{c_i}{\varepsilon_i}\right)$$

Solutions faibles

Les solutions faibles sont physiques, ce sont celles qu'on veut approcher numériquement

Présence des termes $u \cdot \nabla(c_i p_e - c_e p_i)$:

- u continue (discontinuités de contact ou détentes): OK.
- u discontinue (chocs) ? Définition théorique : [Dal Maso, Le Floch, Murat, 1995], [Berthon, Coquel, Le Floch, 2012]. Pour sélectionner les chocs admissibles il faut d'autres informations : termes de viscosité, système sous-jacent.

  [Wargnier, Faure, Graille, Magin, Massot, 2020] : conditions de saut à partir de traveling waves en présence de diffusion.

Ici: point de vue cinétique.

But de l’exposé

1. Construire un système d’Euler bitempérature à partir d’un modèle cinétique (limite hydrodynamique)
2. Propriétés entropiques
3. Schéma BGK discret en 2D
   - Schéma d’ordre 1
   - Extension à l’ordre 2

Dérivation du modèle bitempérature

Modèle BGK à deux espèces

$f_e(t,x,v)$, $f_i(t,x,v)$: fonctions de distribution pour les électrons et les ions. Pour $\alpha = e, i$:

$$\partial_t f_\alpha + v \cdot \nabla_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(E + v \wedge B).\nabla_v f_\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha(f_\alpha) - f_\alpha) + \frac{1}{\tau_{ei}}(\overline{\mathcal{M}_\alpha}(f_e, f_i) - f_\alpha),$$

$\tau_\alpha > 0$, $\tau_{ei} > 0$, $\tau_{ie} > 0$, $\tau_{ei} = \tau_{ie}$. Possibilité de traiter $\tau_{ei} \neq \tau_{ie}$

$E(x,t)$: champ électrique, $B(x,t)$: champ magnétique.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\alpha(f_\alpha) &= \frac{n_\alpha}{(2\pi k_B T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} exp(-\frac{|v-u_\alpha|^2}{2k_B T_\alpha/m_\alpha}) \\
\overline{\mathcal{M}_\alpha}(f_e, f_i) &= \frac{n_\alpha}{(2\pi k_B T/m_\alpha)^{3/2}} exp(-\frac{|v-u|^2}{2k_B T/m_\alpha})
\end{aligned}$$

Quantités macroscopiques de mélange

$\alpha = e$ ou i. Densité: n_α, vitesse: u_α, température: T_α

$f_\alpha(t, x, v)$: fonction de distribution de l'espèce α

$$\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha = m_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} f_\alpha dv, \quad u_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} v f_\alpha dv,$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{3}{2} \rho_\alpha \frac{k_B}{m_\alpha} T_\alpha + \frac{1}{2} \rho_\alpha u_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^3} m_\alpha \frac{v^2}{2} f_\alpha dv.$$

Mélange

$$u = \frac{\rho_e u_e + \rho_i u_i}{\rho_e + \rho_i}, \quad n k_B T = \sum_\alpha \frac{1}{2} \rho_\alpha (u_\alpha^2 - u^2) + \sum_\alpha (n_\alpha k_B T_\alpha).$$

Couplage avec les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \cancel{-c^{-2}\partial_t E} + \mathrm{rot} B = \mu_0 j, & j = n_e q_e u_e + n_i q_i u_i \\ \partial_t B + \mathrm{rot} E = 0, & \\ \cancel{\epsilon_0 \mathrm{div} E} = Q, & Q = n_e q_e + n_i q_i \\ \mathrm{div} B = 0. & \end{cases}$$

Q: charge totale, j: courant.

Quasi-neutralité: $Q = 0$: $Z = n_e/n_i = Cte$. Si $\rho = \rho_e + \rho_i$ alors

$$\rho_\alpha = c_\alpha \rho, \quad \alpha = e, i$$

avec c_e et c_i constantes.

Le courant influe sur les vitesses:

$$\begin{cases} u_e = u - \dfrac{m_i}{\rho e Z} j = u - \dfrac{m_i}{\rho q_i} j \\ u_i = u + \dfrac{m_e}{\rho e} j = u - \dfrac{m_e}{\rho q_e} j \end{cases}$$

Limite hydrodynamique

Modèle cinétique

$$\begin{cases} \partial_t f_e + v \cdot \nabla_x f_e + \dfrac{q_e}{m_e}(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f_e = \dfrac{1}{\varepsilon}(\mathcal{M}_e - f_e) + \dfrac{1}{\tau_{ei}}(\overline{\mathcal{M}_e} - f_e), \\ \partial_t f_i + v \cdot \nabla_x f_i + \dfrac{q_i}{m_i}(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v f_i = \dfrac{1}{\varepsilon}(\mathcal{M}_i - f_i) + \dfrac{1}{\tau_{ie}}(\overline{\mathcal{M}_i} - f_i) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} Q = 0, \quad \mathrm{rot} B = \mu_0 j \\ \partial_t B + \mathrm{rot} E = 0 \\ \mathrm{div} B = 0 \end{cases}$$

$\varepsilon \to 0$: $f_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$.

Limite hydrodynamique

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

$$\partial_t(\rho u) + \mathrm{div}\left(\rho u \otimes u + \frac{m_e m_i}{\rho e^2 Z} j \otimes j\right) + \nabla(p_e + p_i) + B \wedge j = 0$$

$$\partial_t \mathcal{E}_\alpha + \mathrm{div}(u_\alpha(\mathcal{E}_\alpha + p_\alpha)) - \frac{q_\alpha c_\alpha}{m_\alpha} \rho E \cdot u_\alpha = \nu_{1,\alpha\beta}(T_\beta - T_\alpha) + \nu_{2,\alpha\beta} j \cdot j + \nu_{3,\alpha\beta} j \cdot u,$$

$$\alpha = e, i.$$

Loi d'Ohm généralisée: $\mu = Z\frac{m_e}{m_i}$, e: charge de l'électron

$$\partial_t j + \mathrm{div}\left(u \otimes j + j \otimes u - \frac{m_i}{\rho Z e}(1-\mu) j \otimes j + \sum_\alpha \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} p_\alpha\right) I\right)$$
$$+ \frac{1-\mu}{\mu} \frac{Ze}{m_i} j \wedge B + \rho \frac{q_e q_i}{m_e m_i}(E + u \wedge B)$$
$$= \frac{j}{\frac{\tau_{ie}}{c_i} + \frac{\tau_{ei}}{c_e}}(\mu - \frac{1}{\mu}).$$

Simplifications de la loi d'Ohm

1. $B = 0 \Longrightarrow j = 0$ et
$$\rho E = \nabla \left(\frac{p_e m_i}{q_i} + \frac{p_i m_e}{q_e} \right)$$
On a Euler bi-température.
2. On garde B et on pose
$$\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \nabla p_\alpha + \rho \frac{q_e q_i}{m_e m_i} (E + u \wedge B) = 0.$$
Dans un cas 1D Tranverse Magnétique on retrouve les calculs de [Brull, Dubroca, Lhébrard, 2021]

Ici on poursuit avec $B = 0$.

Entropie pour le système

Calcul de l'entropie

Entropie de mélange

$$\eta(\mathcal{U}) = \eta_e(\mathbf{U}_e(\mathcal{U})) + \eta_i(\mathbf{U}_i(\mathcal{U})), \quad Q(\mathcal{U}) = u\eta(\mathcal{U}).$$

$$\eta_\alpha(\rho_\alpha, \rho_\alpha u, \mathcal{E}_\alpha) = -\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha(\gamma_\alpha - 1)}\left(\ln\left(\frac{(\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha}{\rho_\beta^{\gamma_\alpha}}\right) + C\right), \quad C \geq 0$$

$$\mathbf{U}_\beta(\mathcal{U}) = (c_\alpha\rho, c_\alpha\rho u, \mathcal{E}_\alpha)$$

Entropie de Boltzmann de mélange

$$\mathcal{H}(f_e, f_i) = \mathcal{H}_s(f_e) + \mathcal{H}_s(f_i), \quad \mathcal{H}_s(f) = \int_{\mathbb{R}^3} (f\,ln(f) - f)dv.$$

$$\mathcal{H}_s(\mathcal{M}_\alpha(f_\alpha)) = \eta_\alpha(\rho_\alpha, \rho_\alpha u, \mathcal{E}_\alpha)$$

Dissipation de l'entropie

L'entropie η est compatible avec l' entropie de Boltzmann:

Théorème Si $\mathcal{U}$ est une solution du modèle d'Euler bitempérature obtenue par limite du modèle cinétique alors

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \mathrm{div}_x \cdot Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e}(T_i - T_e)^2.$$

Une solution sera dite admissible si elle vérifie cette inégalité. [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Estibals, Dubroca, 2018]

Schéma numérique : modèle BGK discret

Schémas 1D

1. Schémas fluides [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Estibals,Dubroca, 2018]
    - Discrétisation et prise des moments du modèle cinétique (SC)
    - Relaxation des pressions (Suliciu)
    - Lagrange-projection (LP)
    - BGK discret (BGKD)
2. These de C. Prigent : Schéma DVM à partir du modèle cinétique précédent [Brull, Dubroca, Prigent, 2020] (DVM)

En l'absence de choc tous ces schémas ont les mêmes performances

(SC), (BGKD), (DVM) produisent les mêmes chocs

(BGKD) a une inégalité d'entropie discrète

Modèle cinétique de type BGK discret

Système de loi de conservation

$$\partial_t U + \sum_{d=1}^{D} \partial_{x_d} F_d(U) = 0,$$

où $U(x,t) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^K$ convexe.

Approximation par relaxation

$$\partial_t f^\varepsilon + \sum_{d=1}^{D} \Lambda_d \partial_{x_d} f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(M(Pf^\varepsilon) - f^\varepsilon\right),$$

$f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, \ldots, f_L^\varepsilon)$, $\quad f^\varepsilon(x,t) \in (\mathbb{R}^K)^L$, $\Lambda_d = \mathrm{diag}\,(v_{d,1}\mathrm{I}_K, \ldots, v_{d,L}\mathrm{I}_K)$, $v_{d,l} \in \mathbb{R}$,
$P \in \mathcal{L}\Big((\mathbb{R}^K)^L, \mathbb{R}^K\Big)$, et $M = (M_1, \ldots, M_L)\colon \Omega \to (\mathbb{R}^K)^L$.

Dit autrement

$$\partial_t f_l^\varepsilon + \sum_{d=1}^{D} v_{d,l} \partial_{x_d} f_l^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left(M_l(Pf^\varepsilon) - f_l^\varepsilon\right), \quad 1 \le l \le L.$$

Limite fluide

La compatibilité est assurée par

$$\forall U \in \Omega, \qquad P(M(U)) = U, \qquad P(\Lambda_d M(U)) = F_d(U), \qquad d = 1, \ldots, D.$$

On applique P

$$\partial_t (P f^\varepsilon) + \sum_{d=1}^{D} \partial_{x_d} P(\Lambda_d f^\varepsilon) = 0.$$

De plus, $f^\varepsilon \to f \Rightarrow f = M(Pf)$

P: opérateur de moments

$U = Pf$ est solution du pb de départ

Résultats théoriques: [Natalini, 1998], [Serre, 2000], [Bouchut, 1999]
Développements numériques: [Aregba-Driollet, Natalini, 2000][Aregba-Driollet, Natalini, Tang 2004]
Euler bi-température : ajout du terme de force. Fait en 1D et ordre 1 dans [Aregba-Driollet, Breil, Brull, Dubroca,Estibals, 2018]

Cas présent

Dimension 2 et 4 vitesses. $D = 2$ et $L = 4$.

$$\begin{cases} \partial_t f_1^\varepsilon + \lambda_1^- \partial_x f_1^\varepsilon = & \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_1(Pf^\varepsilon) - f_1^\varepsilon\right) \\ \partial_t f_2^\varepsilon + \lambda_2^- \partial_y f_2^\varepsilon = & \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_2(Pf^\varepsilon) - f_2^\varepsilon\right) \\ \partial_t f_3^\varepsilon + \lambda_1^+ \partial_x f_3^\varepsilon = & \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_3(Pf^\varepsilon) - f_1^\varepsilon\right) \\ \partial_t f_4^\varepsilon + \lambda_2^+ \partial_y f_4^\varepsilon = & \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_4(Pf^\varepsilon) - f_4^\varepsilon\right) \end{cases}$$

Définition de P

$$\forall f \in (\mathbb{R}^K)^4, \quad Pf = \sum_{l=1}^{4} f_l\,.$$

Définition des Maxwelliennes

$$M(U) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}\left(\dfrac{\lambda_1^+}{2}U - F_1(U)\right) \\ \dfrac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}\left(\dfrac{\lambda_2^+}{2}U - F_2(U)\right) \\ \dfrac{1}{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}\left(\dfrac{-\lambda_1^-}{2}U + F_1(U)\right) \\ \dfrac{1}{\lambda_2^+ - \lambda_2^-}\left(-\dfrac{\lambda_2^-}{2}U + F_2(U)\right) \end{pmatrix}.$$

Condition sous caractéristique

$$\forall U \in \Omega,\ \sigma(F_d'(U)) \subset \left]\frac{\lambda_d^-}{2}, \frac{\lambda_d^+}{2}\right[,\ d = 1,2 \iff \forall U \in \Omega,\ \forall l\ \sigma(M_l'(U)) \subset]0, +\infty[.$$

Construction du modèle

On pose pour $f^\alpha \in (\mathbb{R}^4)^4$: $Pf^\alpha = U^\alpha = (\rho^\alpha, \rho^\alpha u^\alpha, \mathcal{E}^\alpha)$.

$$
\begin{cases}
\partial_t f_l^{e,\varepsilon} + \displaystyle\sum_{d=1}^{2} v_{d,l} \partial_{x_d} f_l^{e,\varepsilon} + \dfrac{q^e}{m^e} N(E^\varepsilon) f_l^{e,\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_l^e(U^{e,\varepsilon}) - f_l^{e,\varepsilon}\right) + B_l^{ei}(f^{e,\varepsilon}, f^{i,\varepsilon}), \\
\partial_t f_l^{i,\varepsilon} + \displaystyle\sum_{d=1}^{2} v_{d,l} \partial_{x_d} f_l^{i,\varepsilon} + \dfrac{q^i}{m^i} N(E^\varepsilon) f_l^{i,\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(M_l^i(U^{i,\varepsilon}) - f_l^{i,\varepsilon}\right) + B_l^{ie}(f^{e,\varepsilon}, f^{i,\varepsilon}), \\
\cancel{-c^{-2}\partial_t E^\varepsilon} = \mu_0 \left(\dfrac{q^e}{m^e} \rho^{e,\varepsilon} u^{e,\varepsilon} + \dfrac{q^i}{m^i} \rho^{i,\varepsilon} u^{i,\varepsilon}\right), \\
\cancel{\epsilon_0 \mathrm{div} E^\varepsilon} = \dfrac{q^e}{m^e} \rho^{e,\varepsilon} + \dfrac{q^i}{m^i} \rho^{i,\varepsilon} \\
\mathrm{rot} E^\varepsilon = 0
\end{cases}
$$

$B^{\alpha\beta}$: terme source $\Rightarrow$ interactions ions-électrons

$$PB^{\alpha\beta} \Rightarrow (0, 0, 0, \nu^{\alpha\beta}(T^\beta - T^\alpha)).$$

Limite quasi-neutre

$$\rho^e = c^e \rho, \quad \rho^i = c^i \rho, \quad u = u^e = u^i$$

Obtention du système fluide

Terme de force (similaire à $E \cdot \nabla_v f$)

$$\forall f_l \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad N(E)f = -(0, f_{l,1} E, f_{l,2} \cdot E)$$

et donc si $f = M^\alpha(U^\alpha)$ le moment s'écrit

$$N(E)U^\alpha = -(0, \rho^\alpha E, \rho^\alpha u \cdot E)$$

Conservation de la masse:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

Energies:

$$\partial_t \mathcal{E}^e + \nabla \cdot (u(\mathcal{E}^e + p^e)) - \frac{q^e}{m^e} \rho^e u \cdot E = \nu^{ei}(T^i - T^e),$$
$$\partial_t \mathcal{E}^i + \nabla \cdot (u(\mathcal{E}^i + p^i)) - \frac{q^i}{m^i} \rho^i u \cdot E = -\nu^{ei}(T^i - T^e).$$

Loi d'Ohm

Les quantités de mouvement:

$$\begin{cases} \partial_t(\rho^e u) + \nabla \cdot (\rho^e u \otimes u) + \nabla p^e - \dfrac{q^e}{m^e} E\rho^e = 0 \\ \partial_t(\rho^i u) + \nabla \cdot (\rho^i u \otimes u) + \nabla p^i - \dfrac{q^i}{m^e} E\rho^i = 0 \end{cases}$$

donne l'expression de E:

$$\frac{\rho^i q^i}{m^i} E = -\frac{\rho^e q^e}{m^e} E = -c^i \nabla p^e + c^e \nabla p^i.$$

Entropies cinétiques

Les maxwelliennes sont de la forme

$$M_l^\alpha(U^\alpha) = \theta_l U^\alpha + \zeta \cdot F^\alpha(U^\alpha), \qquad 1 \leq l \leq 4, \qquad \alpha = e, i,$$

avec $\theta_l \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^2$. On pose pour toute paire entropie-flux (η^α, Q^α) :

$$G_l^\alpha(U) = \theta_l \eta^\alpha(U) + \zeta_l \cdot Q^\alpha(U).$$

Si la condition sous-caractéristique est vérifiée alors M_l^α est bijective et on a les entropies cinétiques

$$H_l^\alpha(f_l^\alpha) = G_l^\alpha((M_l^\alpha)^{-1}(f_l^\alpha)).$$

- H_l^α est convexe. (E0)
- $\sum_{l=1}^{4} H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = \eta^\alpha(U^\alpha).$ (E1)
- $\sum_{l=1}^{4} V_l H_l^\alpha(M_l^\alpha(U^\alpha)) = Q^\alpha(U^\alpha).$ (E2)
- si $U_f = P(f)$, $\sum_{l=1}^{4} H_l^\alpha(M_l^\alpha(U_f)) \leq \sum_{l=1}^{4} H_l^\alpha(f_l).$ (E3)

Admissibilité

Si $\mathcal{U}$ est une solution d'Euler bi-température obtenue comme limite du modèle BGK discret alors c'est une solution admissible:

$$\partial_t \eta(\mathcal{U}) + \mathrm{div}_x \cdot Q(\mathcal{U}) \leq -\frac{\nu_{ei}}{k_B T_i T_e}(T_i - T_e)^2.$$

Obtention du schéma d'ordre 1

Schéma numérique

Δx_1 et Δx_2: pas d'espace, Δt pas de temps, $j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$.
Pour toute inconnue $v(x_1, x_2, t)$, v_j^n: approximation au temps t^n sur la cellule $C_j =]x_{1,j_1-\frac{1}{2}}, x_{1,j_1+\frac{1}{2}}[\times]x_{2,j_2-\frac{1}{2}}, x_{2,j_2+\frac{1}{2}}[$. Supposons $\mathcal{U}_j^n = (\rho_j^n, \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_{e,j}^n, \mathcal{E}_{i,j}^n)$ connu.

Etape 1: Définition de $f_j^{\alpha,n}$ comme

$$U_j^{\alpha,n} = (c^\alpha \rho_j^n, c^\alpha \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_j^{\alpha,n}), \quad f_j^{\alpha,n} = M^\alpha(U_j^{\alpha,n}), \qquad j \in \mathbb{Z}^2, \qquad \alpha = e, i.$$

Etape 2: Résolution d'un système d'équations de transport linéaires:

$$\partial_t f^\alpha + \sum_{d=1}^{2} \Lambda_d \partial_{x_d} f^\alpha = 0$$

par schéma upwind

Puis on applique P et on obtient $U_j^{\alpha,n+\frac{1}{2}}$, $\alpha = e, i$.

Prise en compte du terme de force et du terme source

Etape 3: Schéma implicite sur les termes de force et les sources puis prise des moments.

Discrétisation des termes non conservatifs

$$u \cdot \nabla_x (c_e p_i - c_i p_e) \iff u_j^{n+1} \cdot \sum_{d=1}^{2} \frac{1}{\Delta x_d} \left(\delta^n_{j+\frac{e_d}{2}} - \delta^n_{j-\frac{e_d}{2}} \right)$$

où

$$\delta^n_{j+\frac{e_d}{2}} = -c^i F^{e,n}_{j+\frac{e_d}{2},2} + c^e F^{i,n}_{j+\frac{e_d}{2},2} \in \mathbb{R}^2.$$

L'approximation des termes non conservatifs est consistante avec

$$\delta^n_{j+\frac{e_d}{2}} = \delta_d(\mathcal{U}^n_j, \mathcal{U}^n_{j+e_d}), \qquad \delta(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = (-c^i p^e + c^e p^i)\mathrm{I}.$$

$\Rightarrow$ Approximation de la loi d'Ohm

Approximation des termes non conservatifs

$$\delta^n_{j+\frac{e_d}{2}} = \begin{cases} \left(-c_i p^{e,n}_{j+e_d} + c_e p^{i,n}_{j+e_d}\right) e_d \ \text{si} \quad \lambda^-_d < \lambda^+_d \leq 0, \\ \left(-c_i p^{e,n}_{j} + c_e p^{i,n}_{j}\right) e_d \ \text{si} \quad 0 \leq \lambda^-_d < \lambda^+_d, \\ \left(\frac{\lambda^+_d}{\lambda^+_d - \lambda^-_d}(-c^i p^{e,n}_j + c^e p^{i,n}_j) - \frac{\lambda^-_d}{\lambda^+_d - \lambda^-_d}(-c^i p^{e,n}_{j+e_d} + c^e p^{i,n}_{j+e_d})\right) e_d \\ \qquad \text{if} \quad \lambda^-_d < 0 < \lambda^+_d . \end{cases}$$

Terme consistant avec $c^e p^i - c^i p^e$.

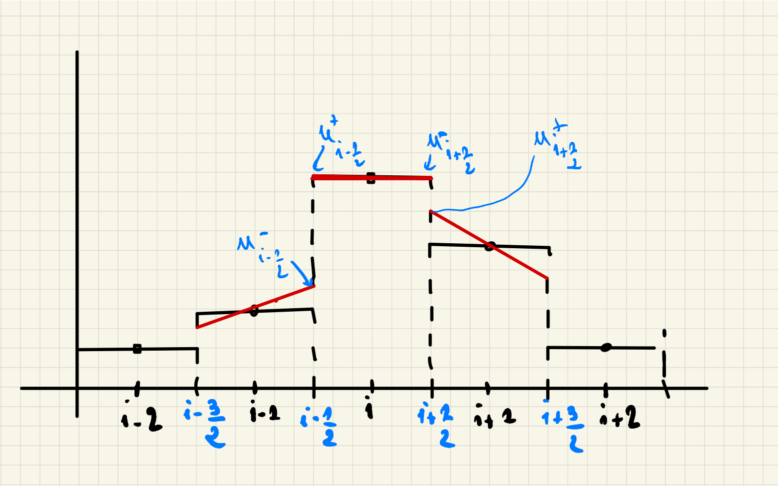
Propriétés du schéma d'ordre 1

1. Si la condition sous-caractéristique et la condition de CFL sont vérifiées alors on a une inégalité d'entropie discrète.

2. Si $\gamma_e = \gamma_i$ alors $(\rho_j^n, \rho_j^n u_j^n, \mathcal{E}_j^{e,n} + \mathcal{E}_j^{i,n})$ est solution du schéma HLL.
   Conséquence:
   $$\rho > 0, \quad p_e + p_i > 0.$$

Obtention du schéma d'ordre 2

Reconstruction affine cas 1D



Pentes calculés à partir des $\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$ et $\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$

Situation 1d

Loi de conservation

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0.$$

Point de départ: Schéma d'ordre 1

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

Etape 1: Reconstruction affine:

$$\forall x \in C_j =]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[, \qquad U^n(x) = U_j^n + \sigma_j^n(x - x_j), \quad x_j = \frac{1}{2}(x_{j-\frac{1}{2}} + x_{j+\frac{1}{2}}).$$

Etape 2: Valeurs à l'interface

$$U_{j+\frac{1}{2}}^+ = (U^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^+ = U_{j+1}^n - \sigma_{j+1}^n \frac{\Delta x}{2}, \qquad U_{j+\frac{1}{2}}^- = (U^n(x_{j+\frac{1}{2}}))^- = U_j^n + \sigma_j^n \frac{\Delta x}{2}.$$

Reconstruction affine cas 1D

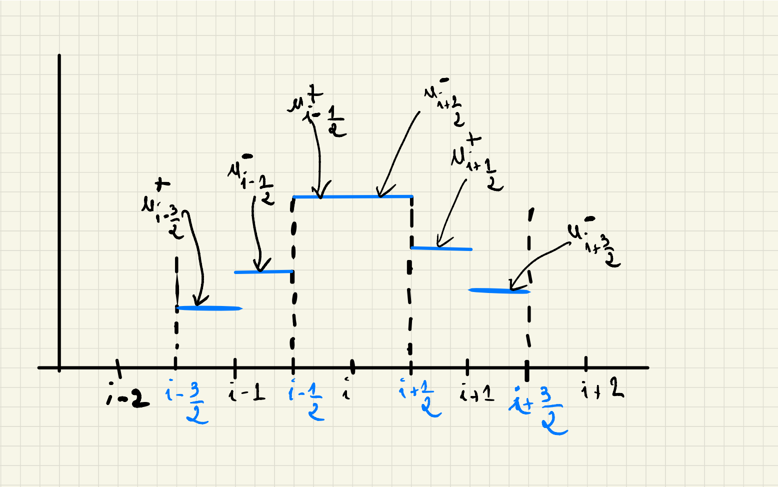
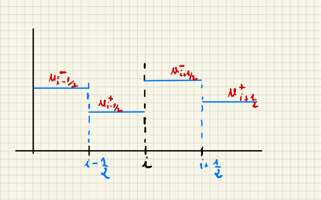


Schéma final



$$U_i^{n+1,-} = U_{i-\frac{1}{2}}^{+} - \frac{2\Delta t}{\Delta x}\Big(\mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^{+}, U_{i+\frac{1}{2}}^{-}) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^{-}, U_{i-\frac{1}{2}}^{+})\Big)$$

$$U_i^{n+1,+} = U_{i+\frac{1}{2}}^{-} - \frac{2\Delta t}{\Delta x}\Big(\mathcal{F}(U_{i+\frac{1}{2}}^{-}, U_{i+\frac{1}{2}}^{+}) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^{+}, U_{i+\frac{1}{2}}^{-})\Big).$$

Schéma final

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\Big(U_j^{n+1,-} + U_j^{n+1,+}\Big) = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\mathcal{F}(U_{i+\frac{1}{2}}^{-}, U_{i+\frac{1}{2}}^{+}) - \mathcal{F}(U_{i-\frac{1}{2}}^{-}, U_{i-\frac{1}{2}}^{+})\Big)$$

En pratique: on n'a pas besoin des flux aux milieux de mailles.

Cas conservatif

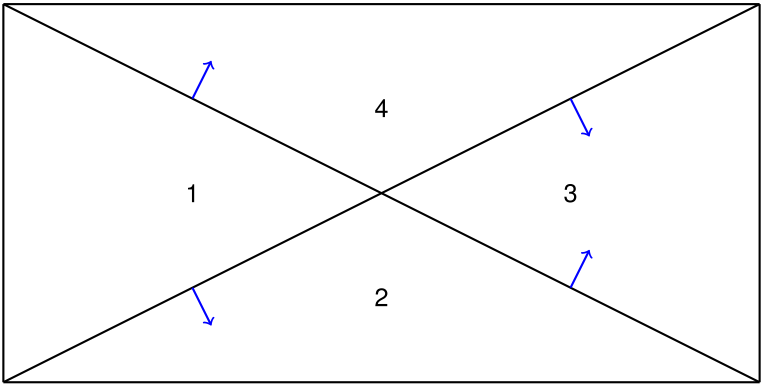
Ces idées se géneralisent en 2D en divisant chaque maille en triangles.

[Perthame, Shu 1996], [Bouchut 2004]: les propriétés de positivité et, partiellement, d'entropie, sont conservés.

Procédures de limitation: [Perthame, Qiu 1994], [Berthon 2006], [Calgaro, Creusé, Goudon, Penel 2013]

Maille

Maille C_j découpée en 4 quadrants



Mise en place du schéma

$(\mathcal{U}_j^n)_j$ solution approchée à t^n. $\mathcal{U}^n$ reconstruite par des pentes $\sigma_j^n = (\sigma_{1,j}^n, \sigma_{2,j}^n)$, $j \in \mathbb{Z}^2$:

$$\forall x \in C_j, \qquad \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_j^n + (x - x_j) \cdot \sigma_j^n.$$

4 états constants

$$\mathcal{U}_j^{(1)} = \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_1}{2}\sigma_{1,j}^n, \qquad \mathcal{U}_j^{(2)} = \mathcal{U}_j^n - \frac{\Delta x_2}{2}\sigma_{2,j}^n,$$
$$\mathcal{U}_j^{(3)} = \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_1}{2}\sigma_{1,j}^n, \qquad \mathcal{U}_j^{(4)} = \mathcal{U}_j^n + \frac{\Delta x_2}{2}\sigma_{2,j}^n.$$

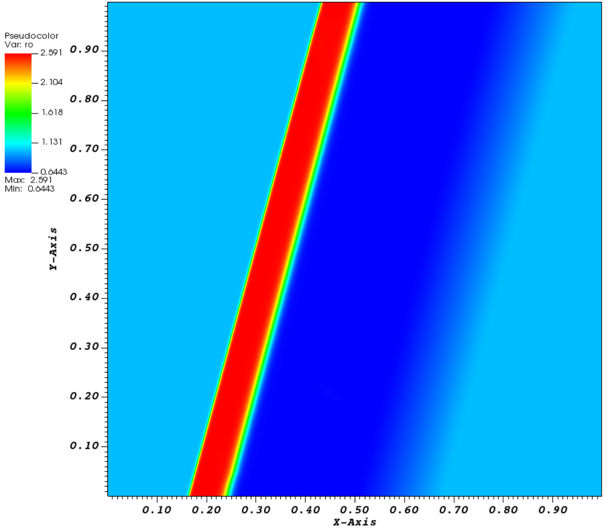
On applique le schéma d'ordre 1 sur chaque triangle. Tout est explicitable (upwind).

DIFFERENCE PRATIQUE AVEC LE CAS CONSERVATIF : il faut faire tous ces calculs, pas de simplification.

Résultats numériques

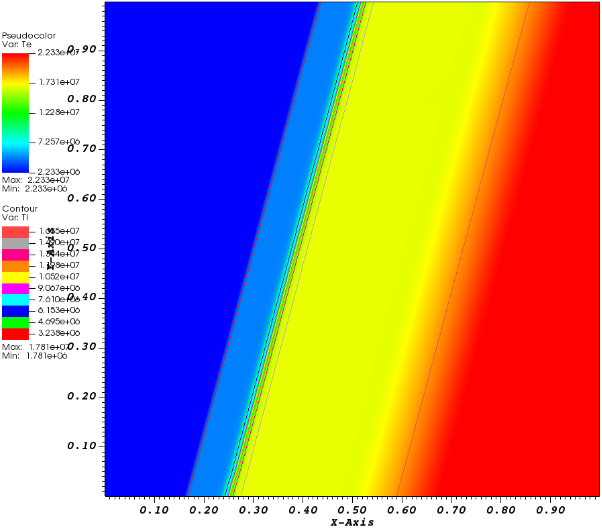
Cas test oblique: densité totale

Cas test de Sod. $\nu^{ei} = 4 \times 10^9$. Grille en espace 800×800



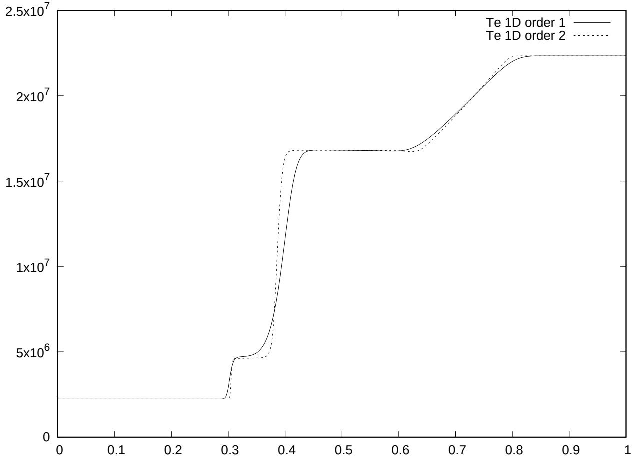
Cas test oblique

$\nu^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 by 800 points: temperatures



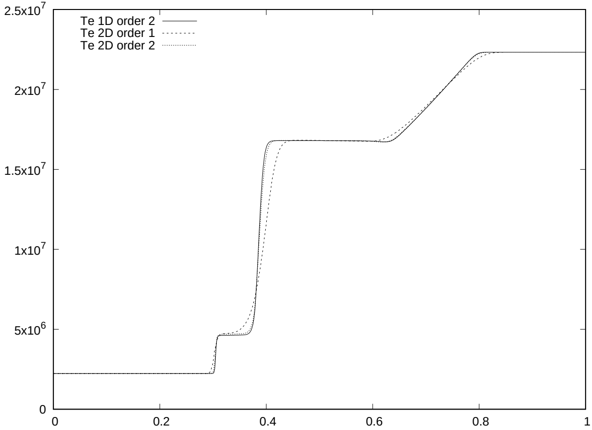
Résultats 1D

Cas test de Sod avec $\nu^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 par 800 points. Résultats 1D



Comparaison 1D/2D

Cas test de sod avec $\nu^{ei} = 4 \times 10^9$, 800 par 800 points.
Comparaison 1D / 2D. Résultats le long de la direction de propagation



Pb de Riemann à 4 interfaces

Domaine $[0,1] \times [0,1]$, partitionés en 4 quadrants de tailles identiques

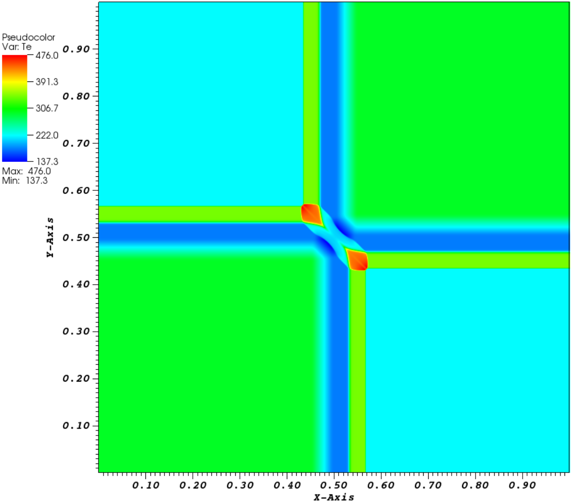
$$\begin{aligned}
\rho(x_1,x_2,0) &= 1 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5, \\
\rho(x_1,x_2,0) &= 0.125 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5, \\
\rho(x_1,x_2,0) &= 0.125 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5, \\
\rho(x_1,x_2,0) &= 1 \text{ kg.m}^{-3}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,
\end{aligned}$$

Températures électronique and ioniques:

$$T^e(x_1,x_2,0) = 293 \text{ K}, T^i(x_1,x_2,0) = 273 \text{ K}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$
$$T^e(x_1,x_2,0) = 220 \text{ K}, T^i(x_1,x_2,0) = 200 \text{ K}, \text{ si } x_1 < 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$
$$T^e(x_1,x_2,0) = 220 \text{ K}, T^i(x_1,x_2,0) = 200 \text{ K}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 < 0.5,$$
$$T^e(x_1,x_2,0) = 293 \text{ K}, T^i(x_1,x_2,0) = 273 \text{ K}, \text{ si } x_1 > 0.5 \text{ and } x_2 > 0.5,$$

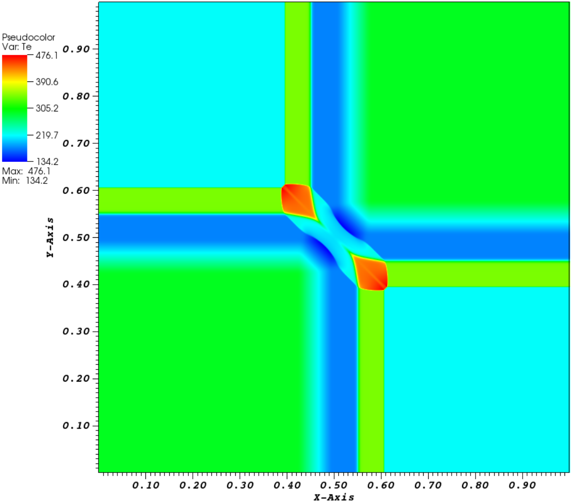
Température électronique

Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces
$\nu^{ei} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



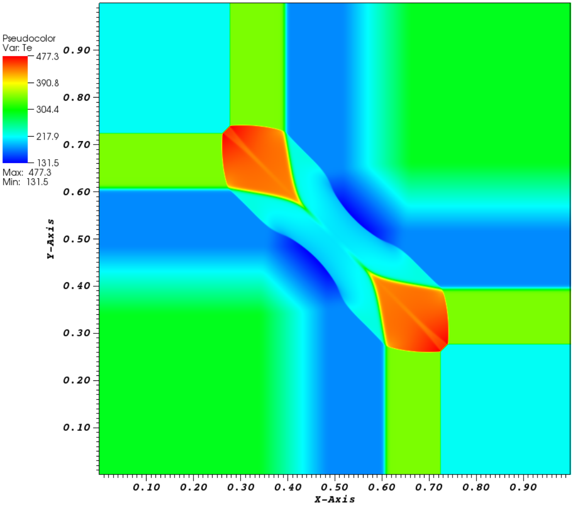
Température électronique

Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces
$\nu^{ei} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



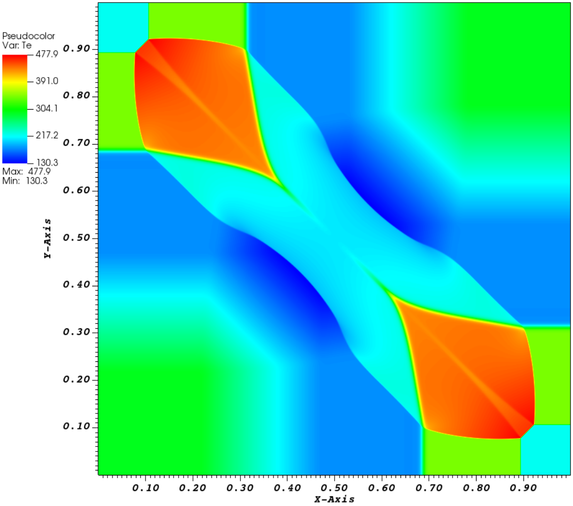
Température électronique

Température électronique s pour un pb de Riemann à 4 interfaces
$\nu^{ei} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Température électronique

Température électronique pour un pb de Riemann à 4 interfaces
$\nu^{ei} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, pour une grille 2000×2000



Comparaison 1D/2D

Températures électronique et ioniques à $t = 0.0001$s pour les 4 interfaces $\nu^{ei} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$, avec une grille de 2000 par 2000 points

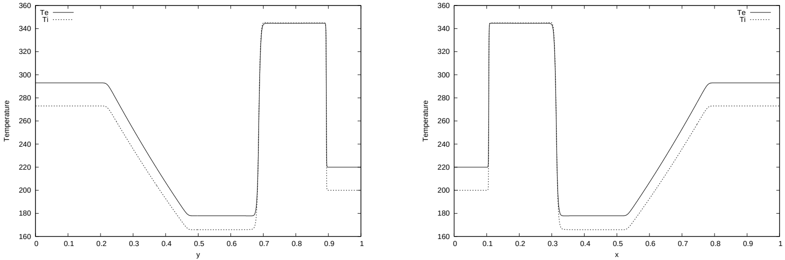


Figure: Résultats le long de l'axe $x_1 = 0.05$ (gauche) and le long de l'axe $x_2 = 0.95$ (droite).

Comparaison avec un code conservatif

[Coquel, Marmignon, 1998], [Estibals, Guillard, Sangam 2021] Hypothèse: l'entropie électronique S_e est constante dans un choc.

Obtention d'un système hyperbolique conservatif en les variables ρ, ρu, $\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_i$, $\rho_e S_e$.

Cas-test: point-triple.

Point triple: condition initiale

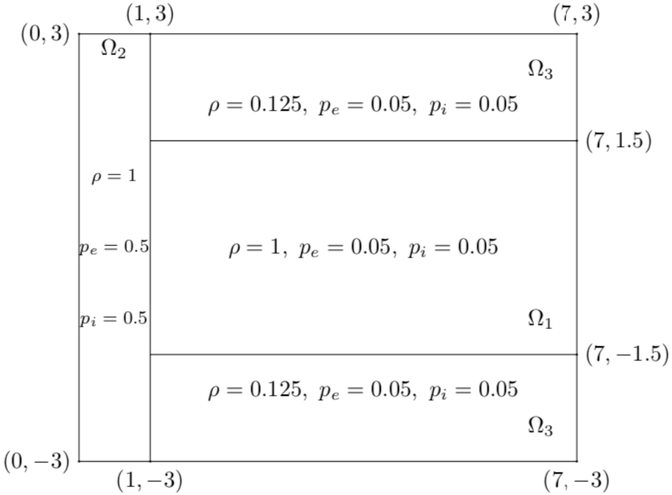
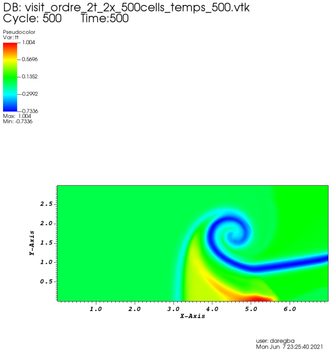
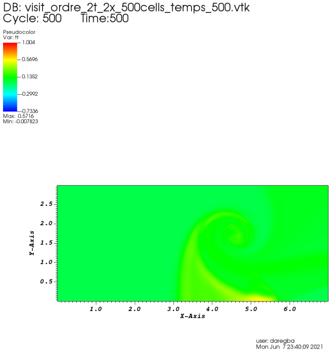


Figure 18: Initialization of the triple point problem in a rectangle.

Point triple: différence entre T_i et T_e





Gauche: conservatif. Droite: non conservatif

Implosion

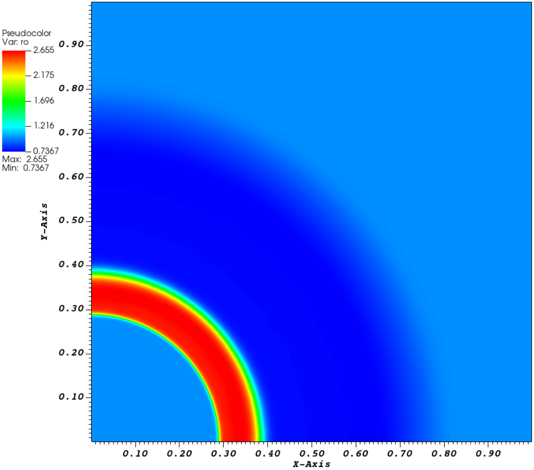
Conditions initiales pour un problème de Riemann: $\rho = 1$ kg.m^{-3}, $u = 0$ m.s^{-1}
les températures sont données par:

$$T^e(x_1, x_2, 0) = 2,3 \times 10^6 K, \quad T^i(x_1, x_2, 0) = 1.7406 \times 10^6 K \quad \text{if } (x_1)^2 + (x_2)^2 < \frac{1}{4},$$
$$T^e(x_1, x_2, 0) = 2,3 \times 10^7 K, \quad T^i(x_1, x_2, 0) = 1.7406 \times 10^7 K \quad \text{sinon}$$

Temps final de simulation: $t = 4.0901 \times 10^{-7}$ s.
Fréquence de relaxation ν^{ei} choisie de façon réaliste par le formulaire du NRL.

Densité totale

Densité totale au temps $t = 4.0901 \times 10^{-7}$s pour une grille 500×500
ν^{ei} donné par le formulaire du NRL



Comparaison avec un calcul 1d

Densité totale et vitesse le long de la première bissectrice
$t = 4.0901 \times 10^{-7}$s avec ν^{ei} par le formulaire du NRL avec une grille 500 x 500

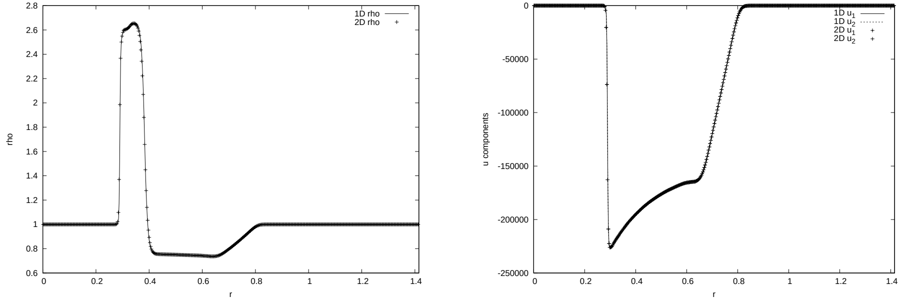


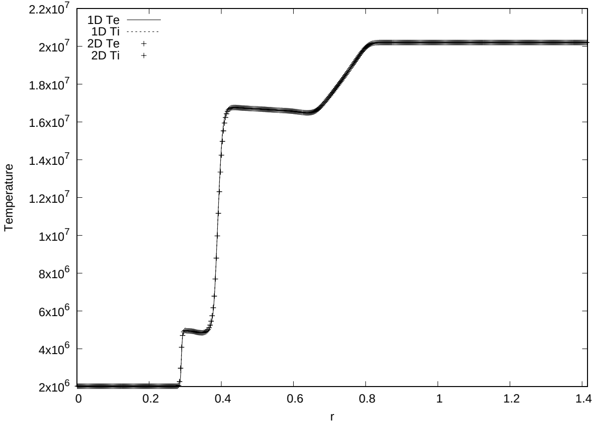
Figure: Densité totale (gauche) et vitesse (droite)

Comparaison avec un calcul 1d

Comparaison avec un calcul 1D en coordonnées polaires

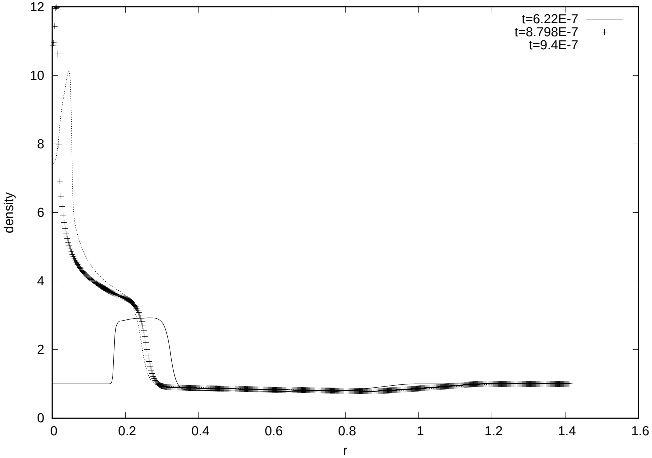
Températures éctroniques and ioniques au temps $t = 4.0901 \times 10^{-7}$s

ν^{ei} donné par le formulairedu NRL pour une grille 500 x 500



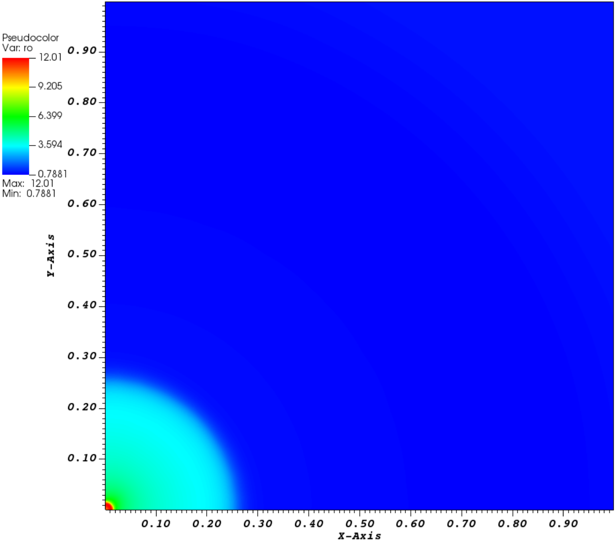
Comparaison avec un calcul 1d: densité

ν^{ei} donné par le formulaire du NRL pour une grille 500×500
Densité le long de la 1ère bissectrice à 3 temps différents
Pic observé à $t = 8.798 \times 10^{-7}$sec.



Densité

Isovaleurs de la densité lors du pic



Conclusions et Perspectives

Conclusions

- Développement d'un schéma BGK discret 2D sur le modèle bitempérature
- Passage à l'ordre 2

Perspectives

- Essais avec d'autres choix de maxwelliennes (non entropiques mais plus précis)
- Prise en compte des champs magnétiques
  Schéma BGK discret pour le modèle bitempérature avec champs magnétiques.
- Calculs de profils de choc

Merci pour votre attention