Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois.

Algorithme de de Casteljau

27 octobre 2006.

1) Préliminaires algébriques.

- Soient $a_0, \dots, a_n$ $(n+1)$ points de $\mathbb{R}^d$ (avec $d=3$ pour les applications industrielles et $d=2$ pour ces travaux pratiques). Une "courbe à pôles" paramétrée par la famille $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une courbe $[0,1] \ni t \mapsto P_n(a_0, \dots, a_n; t) \in \mathbb{R}^d$ paramétrée par un polynome de Bernstein :

$$P_n(a_0, \dots, a_n; t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} a_k .$$

- on a une relation fondamentale (qu'il n'est pas interdit de démontrer !) :

$$P_n(a_0, \dots, a_n; t) = (1-t)\, P_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}; t) + t\, P_{n-1}(a_1, \dots, a_n; t)$$

pour tout $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$, tout $t \in \mathbb{R}$. En donner une interprétation géométrique

- Le but de ce TP est de construire de proche en proche un algorithme (dit de de Casteljau) afin de tracer la courbe à pôle pour un ensemble suffisant de paramètres $t \in [0,1]$.

2) Cas du degré 2.

- On se donne a_0, a_1, a_2 trois points de $\mathbb{R}^2$. Représenter le "polygone de contrôle" $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2]$. Pour quelques valeurs de t, calculer $P_1(a_0, a_1 ; t)$ et $P_1(a_1, a_2 ; t)$. Les tracer, ainsi que le segment de droite $[P_1(a_0, a_1 ; t), P_1(a_1, a_2 ; t)]$. Construire (en le représentant !) le point $P_2(a_0, a_1, a_2 ; t)$. Que remarque-t-on ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

3) Cas du degré 3

- Reprendre la construction précédente avec quatre points $a_0, \dots, a_3$ de $\mathbb{R}^2$. Représenter le polygone de contrôle $\bigcup_{j=0}^{2} [a_j, a_{j+1}]$. Calculer successivement (en les représentant !) les points "d'ordre 1" $P_1(a_0, a_1 ; t)$, $P_1(a_1, a_2 ; t)$ et $P_1(a_2, a_3 ; t)$. Puis passer aux points d'ordre 2 : $P_2(a_0, a_1, a_2 ; t)$ [déjà construit à la question précédente !] et $P_2(a_1, a_2, a_3 ; t)$. Tracer le segment joignant ces deux derniers points ainsi que le point "final" $P_3(a_0, a_1, \dots, a_3; t)$. Donner à t quelques valeurs (10 à 20 typiquement). Que remarque-t-on à nouveau?

- En faisant varier la position relative des pôles $a_0, \dots, a_3$, découvrir une autre propriété classique de ces "courbes à pôls".

4) <u>Cas d'un degré arbitraire.</u>

- Concevoir un module général pour tracer la courbe à pôles $a_0, \dots, a_n$. Bien entendu, c'est une extension des cas traités aux questions 2 et 3.
- Tester ce module pour les degrés 2 et 3 avant de le voir s'exprimer pour des degrés plus élevés. Quid si deux pôles sont confondus?

NB. Les "courbes à pôls" sont nommées ainsi par leur inventeur, Paul de Casteljau. Elles sont plus connues sous le nom de "courbes de Bézier".

17/10/06.