Université Paris Sud
Modélisation et Calcul Scientifique
TP proposé par F. Dubois.

Splines cubiques.

. 13 janvier 2006.

(1) Interpolation de Hermite.

- Expliciter la base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ de l'espace P_3 des polynomes de degré ≤ 3 de sorte que

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1(1) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_1'(1) = 0 \tag{1.1}$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2(1) = 1, \quad \varphi_2'(0) = 0, \quad \varphi_2'(1) = 0 \tag{1.2}$$

$$\varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_3(1) = 0, \quad \varphi_3'(0) = 1, \quad \varphi_3'(1) = 0 \tag{1.3}$$

$$\varphi_4(0) = 0, \quad \varphi_4(1) = 0, \quad \varphi_4'(0) = 0, \quad \varphi_4'(1) = 1. \tag{1.4}$$

- Calculer $\varphi_j''(0)$ et $\varphi_j''(1)$ pour les quatre polynomes introduits à la question précédente.

- Montrer que toute fonction $\psi \in P_3$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\psi(x) = \psi(0)\,\varphi_1(x) + \psi(1)\,\varphi_2(x) + \psi'(0)\,\varphi_3(x) + \psi'(1)\,\varphi_4(x). \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

- Développer un module Matlab (ou Scilab, ou octave) qui dessine le graphe $y = \psi(x)$ de $\psi \in P_3$ lorsque $\psi(0)$, $\psi(1)$, $\psi'(0)$, $\psi'(1)$ sont donnés.

(2) Splines cubiques ; maillage uniforme.

- Soient $a < b$ deux nombres réels, N entier naturel,

$$(2.1) \qquad \Delta = \frac{1}{N}.$$

On pose

$$(2.2) \qquad x_j = a + j\Delta, \quad 0 \leq j \leq N$$

On a donc en particulier $x_0 = a$ et $x_N = b$.

- On se donne une famille arbitraire $u_0, \dots, u_N$ de réels et on cherche à interpoler cette famille par une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ de sorte que

$$(2.3) \qquad u(x_j) = u_j, \quad 0 \leq j \leq N.$$

On suppose de plus que la restriction de u à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ est un polynôme de degré ≤ 3 :

$$(2.4) \qquad u\big|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_3, \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

- Montrer que les seules inconnues du problème sont les dérivées de u aux points x_j :

$$(2.5) \qquad \frac{du}{dx}(x_j) = p_j, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- on suppose de plus

$$(2.6) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}(a) = \frac{d^2u}{dx^2}(b) = 0 .$$

Montrer qu'alors la famille $(p_j)_{0 \leq j \leq N}$ est solution d'un système linéaire tridiagonal qu'on déterminera.

- Développer un programme Matlab (ou équivalent) qui, étant donné $N, a, b, u_0, \dots, u_N$, permette de dessiner le graphe de la fonction u définie dans cette partie. Le valider, l'exploiter.

(3) Splines cubiques; maillage quelconque.

- Reprendre l'étude précédente lorsque les x_j vérifient simplement

$$(3.1) \qquad a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b .$$

on pourra poser

$$(3.2) \qquad \Delta_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j , \quad 0 \leq j \leq N-1$$

$$(3.3) \qquad \rho_j = \frac{\Delta_{j+1/2}}{\Delta_{j-1/2}} , \quad 1 \leq j \leq N-1 .$$