A propos de l'acoustique de Galbrun

François Dubois *

26 décembre 2001.

Résumé

Nous proposons un établissement des équations de l'acoustique de Galbrun.

Plan

1) Déplacement acoustique lagrangien
2) Infiniment petits de Galbrun
3) Un peu d'algèbre
4) Equation de Galbrun
5) Références bibliographiques.

1) Déplacement acoustique lagrangien.

• Dans la mécanique des fluides courante, on adopte le point de vue d'Euler : on observe à la position x et au cours du temps t un champ φ inconnu. La lettre φ peut désigner la densité ρ, la vitesse u, la pression p, l'entropie spécifique s, etc. Ce point de vue ne doit pas faire oublier l'approche de Lagrange, plus particulaire, où les champs sont considérés à l'origine du temps :

(1.1) $$\Omega_0 \ni a \longmapsto \varphi_0(a) \in \mathbb{R}\,.$$

---

* Conservatoire National des Arts et Métiers, Equipe de recherche Associée n^o 3196, 15 rue Marat, F-78 210 Saint Cyr l'Ecole, Union Européenne ; Applications Scientifiques du Calcul Intensif, bât. 506, BP 167, F-91 403 Orsay Cedex, Union Européenne ; dubois@asci.fr.

avant de les suivre dans leur mouvement.

• Une trajectoire $x = X(\tau, a)$ intègre le champ de vitesse :

$$(1.2) \qquad \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau, a) = u\big(\tau, X(\tau, a)\big), \qquad a \in \Omega_0 .$$

Le domaine initial Ω_0 se transforme en un domaine Ω_τ après un temps τ :

$$(1.3) \qquad \Omega_\tau = \{ X(\tau, a), a \in \Omega_0 \} .$$

La relation (1.2) est souvent écrite sous la forme

$$(1.4) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t, x), \qquad x \in \Omega_t ,$$

avec la relation classique $\dfrac{\partial}{\partial \tau} \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u \bullet \nabla_x$ entre les dérivées partielles des variables de Lagrange et les dérivées partielles des variables d'Euler. Les équations de la dynamique des gaz isentropiques prennent la forme simple suivante :

$$(1.5) \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \,\mathrm{div}\, u = 0$$

$$(1.6) \qquad \rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nabla p = 0$$

$$(1.7) \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 .$$

• Que se passe-t-il quand on regarde une **perturbation** des équations d'Euler (1.5)-(1.6)-(1.7) ? Le point de vue de Galbrun [Ga31] (voir aussi Elias [El00]) consiste à faire une analyse physique en suivant l'approche de Lagrange. A l'origine du temps, il n'y a pas de perturbation, et au fur et à mesure que le temps avance, l'écoulement non perturbé (avec un indice "zéro") vérifie

$$(1.8) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_0(t, x), \qquad x(0, a) = a$$

alors que l'écoulement perturbé est solution de

$$(1.9) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u(t, y), \qquad y(0, a) = a .$$

Quand on fixe un même instant t, deux trajectoires issues d'un même point a diffèrent du vecteur ξ :

$$(1.10) \qquad y = x + \xi$$

ainsi qu'illustré Figure 1.

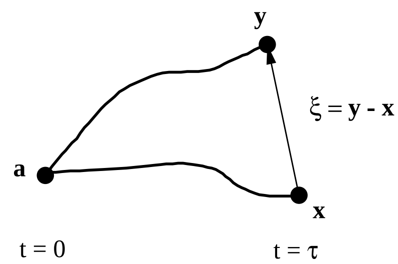

Figure 1 Déplacement acoustique lagrangien.

2) Infiniment petits de Galbrun.

• La remarque de Galbrun est que l'on doit, lorsqu'on regarde la perturbation acoustique d'un écoulement de référence (avec un indice "zéro")

$$(2.1) \qquad \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t} + \rho_0 \,\mathrm{div}\, u_0 = 0$$

$$(2.2) \qquad \rho_0 \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} + \nabla p_0 = 0$$

$$(2.3) \qquad \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t} = 0\,,$$

considérer l'écart "physique" (noté avec un indice "g") à l'instant t entre le champ perturbé φ considéré au point perturbé y (relation (1.10)) et le champ initial φ_0 considéré au point non perturbé x :

$$(2.4) \qquad \varphi_g \equiv \varphi(t,\, x+\xi) - \varphi_0(t,\, x)\,.$$

Noter que le point de vue "mathématique" considéré usuellement mesure l'écart "eulérien" au **même** point x :

$$(2.5) \qquad \varphi_{\text{Euler}} \equiv \varphi(t,\, x) - \varphi_0(t,\, x)$$

pour un champ $\varphi(\bullet, \bullet)$ arbitraire. Dans l'acoustique **linéaire** de Galbrun, le déplacement acoustique lagrangien ξ est un infiniment ptit, ainsi que les écarts ρ_g, u_g, p_g, ... et on néglige tout terme d'ordre supérieur ou égal à deux.

3) Un peu d'algèbre

• Nous disposons des équations non perturbées (2.1), (2.2), (2.3) et des équations perturbées (1.5), (1.6) et (1.7). Les premières sont à considérer au point x et les secondes au point "perturbé" y qui vérifie la relation (1.10). On a par différence de (1.9) et (1.8)

$$(3.1) \qquad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = u(t,\, x+\xi) - u(t,x)\,.$$

Proposition 1. **Opérateur de dérivation.**
On a, en adoptant la convention d'Einstein des indices répétés,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i} \;-\; \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_k} \;+\; (\text{ordre supérieur ou égal à deux \% } \xi)\,. \tag{3.2}$$

Preuve de la Proposition 1.

- Par dérivation de la relation (1.10), on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial y_k} \;=\; \Big(\,\delta_{ik} \,+\, \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\Big)\,\frac{\partial}{\partial y_k}$$

c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial y_i} \;+\; \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial y_k}\,, \tag{3.3}$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i} \;-\; \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\Big(\,\frac{\partial}{\partial x_k} \;-\; \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial y_l}\,\Big) \qquad\qquad c.f. \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_i} \;-\; \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_k} + \;(\text{ordre} \;\geq\; 2 \;\text{ par rapport à }\; \xi)\,,$$

ce qui établit la relation (3.2). □

Proposition 2. **Divergence.**
On a

$$\mathrm{div}_y\, u \;=\; \mathrm{div}_x\, u \;+\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\,\xi) \;+\; (\text{ordre} \;\geq\; 2 \;\%\; \xi)\,. \tag{3.4}$$

Preuve de la Proposition 2.

- On calcule d'abord $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\,\xi)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\,\xi) \;=\; \Big(\,\frac{\partial}{\partial t} \;+\; (u_0)_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)\,\frac{\partial \xi_l}{\partial x_l}$$

$$\qquad\qquad = \;\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial t} \;+\; (u_0)_k\,\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \;-\; \frac{\partial (u_0)_k}{\partial x_l}\,\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}$$

soit

$$\frac{\partial (u_0)_k}{\partial x_l}\,\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \;=\; \mathrm{div}\Big(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\Big) \;-\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\,\xi)\,, \tag{3.5}$$

- On a ensuite :

$$\mathrm{div}_y\, u \;=\; \frac{\partial}{\partial y_j}\,u_j \;=\; \Big(\,\frac{\partial}{\partial x_j} \;-\; \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\Big)\,u_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big((u_0)_{_j} + \frac{\mathrm{d}\,\xi_\mathrm{j}}{\mathrm{d}t} \Big) - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_k}(u_0)_{_j} + \ (\text{ordre} \geq 2 \ \% \ \xi) \\
&= \mathrm{div}_x\, u_0 \ + \ \mathrm{div}\,\big(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}t}\big) - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_k}(u_0)_{_k} + \ (\text{ordre} \geq 2 \ \% \ \xi) \\
&= \mathrm{div}_x\, u_0 \ + \ \mathrm{div}\,\big(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}t}\big) + \Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi) - \mathrm{div}\,\big(\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}t}\big) \Big] + \ (\text{ordre} \geq 2 \ \% \ \xi) \\
&= \mathrm{div}_x\, u_0 \ + \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi) + \ (\text{ordre} \geq 2 \ \% \ \xi)
\end{aligned}
$$

ce qui établit la relation (3.4). □

Proposition 3. **Ecart de densité de Galbrun.**
Avec la définition suivante de l'écart ρ_g pour la densité (*c.f.* aussi (2.4)) :

(3.6) $\quad \rho_g \ \equiv \ \rho(t,\, x + \xi) - \rho_0(t,\, x)\,,$

et les hypothèses générales rappelées plus haut, on a :

(3.7) $\quad \rho_g + \rho_0 \ \mathrm{div}\xi \ = \ 0$

à l'ordre deux de précision par rapport à l'infiniment petit ξ.

Preuve de la Proposition 3.

• On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\rho_g}{\rho_0} + \mathrm{div}\xi\Big) &= \frac{1}{\rho_0}\Big(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t}\Big) - \frac{\rho_g}{\rho_0^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi) \\
&= -\frac{\rho}{\rho_0}\,\mathrm{div}_y u + \mathrm{div}_x u_0 + \frac{\rho_g}{\rho_0}\,\mathrm{div}_x u_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi) \\
&= -\frac{1}{\rho_0}(\rho_0 + \rho_g)\,\big(\mathrm{div}_x u_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi)\big) + \Big(1 + \frac{\rho_g}{\rho_0}\Big)\,\mathrm{div}_x u_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi) \\
&= -\frac{\rho_g}{\rho_0}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\xi)
\end{aligned}
$$

qui est un terme d'ordre supérieur ou égal à deux par rapport aux infiniment petits ξ et ρ_g. D'où la relation (3.7). □

Proposition 4. **Pression linéarisée.**
Avec un écart "de Galbrun" pour la pression défini par

(3.8) $\quad p_g(t,\, x) \ \equiv \ p(t,\, x + \xi) - p_0(t,\, x)\,,$

on a :

(3.9) $\quad p_g \ = \ c_0^2 \ \rho_g\,,$

où $c_0(t,\, x)$ est la célérité des ondes sonores de l'écoulement non perturbé :

$$c_0^2 \;=\; \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0}\,. \tag{3.10}$$

Preuve de la Proposition 4.

• On retranche (2.3) de (1.7), en utilisant l'expression classique de l'entropie spécifique d'un gaz parfait, à savoir

$$s \,\equiv\, \frac{p}{\rho^\gamma}\,. \tag{3.11}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{p}{\rho^\gamma}\Big) \,-\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\Big) \;= \\
&\quad=\; \frac{1}{\rho^\gamma}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(p_0 \,+\, p_g\big) \,-\, \frac{\gamma\, p}{\rho^{\gamma+1}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\rho_0 \,+\, \rho_g\big) \,-\, \frac{1}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} \,+\, \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0^{\gamma+1}}\,\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t} \\
&\quad=\; -\frac{\gamma}{\rho_0^{\gamma+1}}\,\rho_g\,\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} \,+\, \frac{1}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\mathrm{d}p_g}{\mathrm{d}t} + \,(\mathrm{ordre}\,\geq\,2\,\%\,\xi\,+\,) \\
&\qquad\qquad +\, \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0^\gamma}\,\frac{1}{\rho_0^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t} \,-\, \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0^{\gamma+1}}\,\frac{\mathrm{d}\rho_g}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad \mathrm{car}\;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\Big) \,=\, 0 \\
&\quad=\; \frac{1}{\rho_0^\gamma}\,\Big[\,\frac{\mathrm{d}p_g}{\mathrm{d}t} \,-\, \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0}\,\frac{\mathrm{d}\rho_g}{\mathrm{d}t} \,-\, \rho_g\,\big(\frac{\gamma}{\rho_0}\,\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} \,-\, \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t}\big)\,\Big] \\
&\quad=\; \frac{1}{\rho_0^\gamma}\,\Big[\,\frac{\mathrm{d}p_g}{\mathrm{d}t} \,-\, c_0^2\,\frac{\mathrm{d}\rho_g}{\mathrm{d}t} \,-\, \rho_g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\frac{\gamma\, p_0}{\rho_0}\big)\,\Big] \\
&\quad=\; \frac{1}{\rho_0^\gamma}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\big(p_g \,-\, c_0^2\,\rho_g\big)
\end{aligned}$$

et la propriété est établie car chacune des perturbations ρ_g et p_g est nulle au temps initial. □

4) Equation de Galbrun.

• Il reste à déterminer l'équation aux dérivées partielles pour le déplacement acoustique lagrangien ξ :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \,\ni\, (t,\, x) \,\longmapsto\, \xi(t,\, x) \,\in\, \mathbb{R}^3\,. \tag{4.1}$$

Proposition 5. **Equation de Galbrun.**

Le champ inconnu ξ de la relation (4.1) vérifie l'équation de Galbrun suivante :

$$\rho_0\,\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} \,-\, \nabla(\rho_0\, c_0^2\, \mathrm{div}\xi) \,+\, (\mathrm{div}\xi)\,\nabla p_0 \,-\, \nabla\xi^{\mathrm{t}} \bullet \nabla p_0 \,=\, 0\,, \tag{4.2}$$

soit en termes développés composantes par composantes :

$$\rho_0 \, \frac{\mathrm{d}^2 \xi_i}{\mathrm{d}t^2} \, - \, \frac{\partial}{\partial x_i} \big(\rho_0 \, c_0^2 \, \mathrm{div} \xi \big) \, + \, (\mathrm{div} \xi) \, \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \, - \, \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \, \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \, = \, 0 \, . \tag{4.3}$$

Preuve de la Proposition 5.

• On écrit la relation (1.6) pour la $i^{\text{ième}}$ composante, en utilisant l'expression (3.6) de la densité, (3.1) de la vitesse, (3.8) et (3.9) de la pression. Il vient :

$$\begin{aligned}
\Big(\rho \, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \, + \, \nabla_y p \Big)_i \, &= \\
&= \, (\rho_0 \, + \, \rho_g) \Big(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} \, + \, \frac{\mathrm{d}^2 \xi}{\mathrm{d}t^2} \Big)_i \, + \, \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \, - \, \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \, \frac{\partial}{\partial x_k} \Big) \big(p \, + \, p_g \big) \\
&= \, \Big(-\nabla p_0 \, - \, \rho_0 \, \mathrm{div} \xi \, \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t} \, + \, \rho_0 \, \frac{\mathrm{d}^2 \xi}{\mathrm{d}t^2} \Big)_i \, + \, \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \, + \, \frac{\partial}{\partial x_i} \big(c_0^2 \, \rho_g \big) \, - \, \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \, \frac{\partial p_0}{\partial x_k} \, + \\
&\qquad \qquad (\text{ordre} \, \geq \, 2 \, \% \, \, \xi) \, , \qquad \qquad \text{compte tenu de (3.7) et (3.2)} \\
&= \, \mathrm{div} \xi \, \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \, + \, \rho_0 \, \frac{\mathrm{d}^2 \xi_i}{\mathrm{d}t^2} \, - \, \frac{\partial}{\partial x_i} \big(\rho_0 \, c_0^2 \, \mathrm{div} \xi \big) \, - \, \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \, \frac{\partial p_0}{\partial x_k} \, + \, (\text{ordre} \, \geq \, 2 \, \% \, \, \xi)
\end{aligned}$$

au vu de (2.2) et (3.7). La relation (4.3) en résulte. □

5) Références bibliographiques.

[El00] G. Elias. Equations exactes de propagation des ondes acoustiques en milieu inhomogène, in *Cours Cea-Edf-Inria "Acoustique dans les écoulements"*, p. 235-252, septembre 2000.

[Ga31] H. Galbrun. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère et théorie des zones de silence*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.