Invent math 115, 151–161 (1994)

Inventiones mathematicae

Appendice: Sur un théorème de Bloch et Kato (lettre à B. Perrin-Riou)

Jean-Marc Fontaine

Mathématique, Université Paris-Sud, Centre d'Orsay, F-91405 Orsay Cedex, France

Oblatum 21-VI-1993

Les discussions que nous avons eues récemment m'ont donné envie d'essayer de comprendre à ma manière l'isomorphisme de Coleman, les homomorphismes de Coates-Wiles et «le théorème de comparaison entre Coates-Wiles et Fontaine-Messing de Bloch-Kato». Je me suis contenté, comme Bloch et Kato de regarder le cas $e=1$, mais le cas général n'a pas l'air plus difficile (juste plus désagréable à écrire).[1]

Cela ne te surprendra pas de retrouver, chemin faisant, des idées de toi, de Bloch ou de Kato, dans un contexte parfois légèrement différent. Cette lettre s'adresse d'ailleurs aussi à Bloch et Kato, et chacun de vous trois voudra bien m'excuser pour ces emprunts.

Remarque. C'est la seconde fois que je vois fonctionner la machine (que j'avais réclamée dans mon laïus à Varsovie [F]) reliant représentations cristallines et représentations p-adiques du groupe de Galois du corps des normes de l'extension cyclotomique. Et c'est la première fois que je la vois fonctionner sans la restriction rituelle «longueur de la filtration $\leqq p-1$».

J'ai pensé un moment que cela allait donner la conjecture «faiblement admissible implique admissible» (au moins pour $e=1$). Cela donne un certain nombre de cas particulliers, mais ça n'a pas l'air de marcher en général.

1 Le contexte

1.1. Notations. Je fixe p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p, $W=W(k)$, $K=\mathrm{Frac}\ W$, $\bar{K}=$une clôture algébrique de K, $G_K=\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, R l'anneau que j'ai l'habitude de noter ainsi (et qui s'appelle aussi R dans le § 1 de [BK], mais qui n'est pas le R du § 2), A_{cris} (pour te faire plaisir) l'anneau que j'ai l'habitude de noter $W^{\mathrm{DP}}(R)$ (et qui est noté B_∞ dans op., cit.), B^+_{cris}, B_{cris}, B^+_{dR}, B_{dR} comme d'habitude, φ le Frobenius absolu agissant sur k, W, K, A_{cris}, B^+_{cris}, B_{cris}.

1.2. Les éléments π, π', v, v'. Tu les connais bien. Pour tout $a\in R$, je vais noter $[a]$ son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. Je choisis «un générateur du

[1] J'étais très optimiste: je ne sais toujours pas faire le cas général

$\mathbb{Z}_p(1)$ multiplicatif», i.e. $\varepsilon=(\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}\in R$, avec $\varepsilon^{(0)}=1$, $\varepsilon^{(1)}\neq 1$ (et, comme toujours, $(\varepsilon^{(n+1)})^p=\varepsilon^{(n)}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$), je pose $\varepsilon'=\varepsilon^{p^{-1}}$ et $\pi'=[\varepsilon']-1$, $v'=1+[\varepsilon']+[\varepsilon']^2+\ldots+[\varepsilon']^{p-1}$, $\pi=[\varepsilon]-1$, $v=1+[\varepsilon]+[\varepsilon]^2+\ldots+[\varepsilon]^{p-1}$.

On a bien sûr $\varphi(\pi')=\pi$, $\varphi(v')=v$, $\pi'v'=\pi$, $\varphi(\pi)=\pi v$. Tu sais bien (et c'est facile à voir) que v' est un générateur de $\mathrm{Fil}^1 W(R)$.

1.3. L'anneau $S=W[\![\pi]\!]$. Je note S l'anneau noté R dans le § 2 de [BK] (il n'est défini dans [BK] que lorsque le corps résiduel est fini, mais pour le moment, on n'en a pas besoin). Cet anneau s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $W(R)\subset A_{\mathrm{cris}}$: toute série formelle $\sum a_m\pi^m$, avec les $a_m\in W$, converge dans $W(R)$; ceci permet d'identifier l'anneau de ces séries formelles à un sous-anneau fermé S de $W(R)$ (l'application est trivialement injective) et cette construction est indépendante du choix de ε.

En outre, S est stable par G_K et φ. Enfin (je ne m'en servirais qu'au § 3), la plupart des opérateurs introduits par Bloch et Kato se comprennent très bien via l'inclusion $S\subset W(R)$. En utilisant leurs notations (§ 2) et en notant χ le caractère cyclotomique, on a

$$g(a)=\sigma_{\chi(g)}(a) \quad \text{et} \quad f(a)=\varphi(a), \qquad \text{si} \quad a\in S, g\in G_K.$$

De même, en remarquant que φ est bijectif sur $W(R)$ et s'étend à $\mathrm{Frac}\, W(R)$ sur lequel il est tout autant bijectif, si $E=\mathrm{Frac}\, S$ et $E'=E([\varepsilon'])\subset\mathrm{Frac}\, W(R)$, alors E'/E est une extension cyclique de degré p, $\varphi^{-1}(E)=E'$; avec les notations de op.cit., on a

$$N_f=N_{E'/E}\cdot\varphi^{-1} \quad \text{et} \quad T_f=\mathrm{Tr}_{E'/E}\cdot\varphi^{-1}.$$

1.4. Le corps des normes. Je te rappelle cette construction que l'on avait faite Jean-Pierre (Wintenberger) et moi, il y a longtemps [FW, Win], et que tu connais aussi bien que moi, dans le cas particulier où nous en avons besoin.

Je pose $K_n=K(\varepsilon^{(n)})$ et je note $\mathcal{O}_{K_n}$ l'anneau de ses entiers. Si $n\geq 1$, si ζ est une racine primitive p-ième de 1, et si $x\in\mathcal{O}_{K_{n+1}}$, il est clair que $N_{K_{n+1}/K_n}(x)\equiv x^p \pmod{\zeta-1}$. Par conséquent, par passage au quotient, la norme induit un homomorphisme d'anneaux

$$O_{K_{n+1}}/(\zeta-1)\to\mathcal{O}_{K_n}/(\zeta-1).$$

Je vais poser

$$\tilde{S}=\lim_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{K_n}/(\zeta-1).$$

Alors $\tilde{S}$ est un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique p; le corps résiduel s'identifie à k (lui-même identifié à un sous-anneau de $\tilde{S}$ par l'application

$$x\mapsto([\varphi^{-n}(x)] \bmod (\zeta-1))_{n\geq 1},$$

et $\tilde{\pi}=\tilde{\varepsilon}-1$, où $\tilde{\varepsilon}=(\varepsilon^{(n)} \bmod (\zeta-1))_{n\geq 1}$, est une uniformisante de $\tilde{S}$.

En outre, si, comme dans [BK, § 2],

$$\mathrm{U}=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{K_n}^*,$$

l'homomorphisme évident de U dans le groupe $\tilde{S}^*$ des unités de l'anneau $\tilde{S}$ est un isomorphisme (et je vais m'en servir pour identifier) U et $\tilde{S}^*$.

Par définition, le corps des normes est le corps des fractions $E=k((\tilde{\pi}))$ de $\tilde{S}$.

1.5. L'identification $\tilde{S}=S/p$. Tu sais que $R=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, l'application de transition étant $x\mapsto x^p$. Il est clair que l'on ne change pas R en remplaçant dans la définition $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ par $\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est n'importe quel idéal de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, différent de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et de son idéal maximal, et contenant p; en particulier, on peut prendre l'idéal engendré par $\zeta-1$, et la relation

$$N_{K_{n+1}/K_n}(x)\equiv x^p (\operatorname{mod} \zeta-1)$$

nous permet d'identifier $\tilde{S}$ à un sous-anneau de R. Si l'on fait cela soigneusement (c'est-à-dire si on envoie $(x_n)_{n\geqq 1}$ sur $(x_n)_{n\geqq 0}$ en posant $x_0=x_1^p$), cette identification est l'unique homomorphisme continu de k-algèbres topologiques qui envoie $\tilde{\varepsilon}$ sur ε.

Par ailleurs, l'application, qui à $\sum a_m \pi^m\in S$ associe $\sum \tilde{a}_m \tilde{\pi}^m\in\tilde{S}$ (où $\tilde{a}_m$ est l'image dans k de $a_m\in W$) nous permet d'identifier $\tilde{S}$ à S/pS.

Enfin toutes ces identifications sont compatibles entre elles, i.e. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \hookrightarrow & W(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S} & \hookrightarrow & R \end{array}$$

est commutatif.

2 L'application ∂ et les vecteurs de Witt

2.1. L'application δ^r. Soit $r\in\mathbb{N}$. La suite exacte courte

$$0\to\mathbb{Q}_p(r)\to \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{cris}}^+ \xrightarrow{p^{-r}\varphi-1} B_{\mathrm{cris}}^+\to 0$$

induit un homomorphisme

$$\partial^r\colon K=(B_{\mathrm{cris}}^+)^{G_K}\to H^1(G_K,\mathbb{Q}_p(r)),$$

qui est injectif si $r\geqq 1$.

Je vais poser $L=\bigcup K_n$, $G_L=\mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$ et $\Gamma=G_K/G_L$. En composant ∂^r avec la restriction, j'obtiens un homomorphisme (encore injectif si $r\geqq 1$)

$$\delta^r\colon K\to \mathrm{Hom}_\Gamma(G_L,\mathbb{Q}_p(r)).$$

2.2. Remarque. En fait, on n'a pas besoin de savoir que $p^{-r}\varphi-1$ est surjective pour définir ∂^r. J'ai $K=(B_{\mathrm{cris}}^+)^{G_K}$, et si je pose

$$K_{adm}^r=\{a\in K\mid \exists\alpha\in \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{cris}}^+ \text{ tel que } (p^{-r}\varphi-1)(\alpha)=a\},$$

on a une application évidente de K^r_{adm} dans $\mathrm{Hom}_\Gamma(G_L, \mathbb{Q}_p(r))$; si l'on sait que $p^{-r}\varphi-1$ est surjective, alors $K^r_{adm}=K$ et cette application n'est autre que δ^r. Je vais adopter ce point de vue.

Si je pose $D_0=\underline{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{Q}_p)$ et $D_{-r}=\underline{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbb{Q}_p(r))$ (je ne sais pas pourquoi mon bon vieux $\underline{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est devenu $\mathrm{Crys}(V)$ dans [BK]), l'égalité $K^r_{adm}=K$ ne signifie rien d'autre que le fait que toute extension de D_0 par D_{-r}, dans la catégorie abélienne des φ-modules filtrés faiblement admissibles, est admissible.

2.3. L'homomorphisme ∂_W. Je te rappelle que, dans [Win], Jean-Pierre montre que la théorie de Galois du corps des normes E s'identifie à celle de L. Dans le contexte où nous sommes, cela se voit très facilement: le corps E est contenu dans Frac R qui est un corps algébriquement clos de caractéristique p sur lequel G_K opère. Si je note $E^{\text{sép}}$ la fermeture séparable de E dans Frac R, c'est une clôture séparable de E; et l'action de G_L sur $E^{\text{sép}}$, induite par son action sur Frac R, identifie G_L à $\mathrm{Gal}(E^{\text{sép}}/E)$.

Comme il est peut-être plus confortable de travailler avec des corps parfaits, je peux aussi bien considérer le corps F clôture radicielle de E dans Frac R, ainsi que sa fermeture algebrique $\bar{F}$ dans Frac R; c'est une clôture algébrique de F sur laquelle G_K opère, donc a fortiori G_L, et on a l'identification

$$G_L=\mathrm{Gal}(E^{\text{sép}}/E)=\mathrm{Gal}(\bar{F}/F).$$

Mais la suite exacte

$$0\to\mathbb{Q}_p\to \mathrm{Frac}\, W(\bar{F})\ \varphi-1\ \mathrm{Frac}\, W(\bar{F})\to 0$$

induit, en prenant les éléments fixes par G_L, un isomorphisme

$$\partial_W: \mathrm{Frac}\, W(F)/(\varphi-1)(\mathrm{Frac}\, W(F))\to \mathrm{Hom}(G_L, \mathbb{Q}_p),$$

dont on voit qu'il commute à l'action naturelle de Γ des deux côtés.

2.4. La comparaison entre δ^r et ∂_W. Je garde les notations du § 1. Pout tout $r\in\mathbb{N}$, si

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}}(-1)^m\cdot\pi^m/(m+1)\Big)^{-r}=\sum\lambda_{m,r}\,\pi^m\in K[\![\pi]\!],$$

je pose $\tau_r=\pi^{-r}\cdot\sum_{0\le m\le r}\lambda_{m,r}\,\pi^m\in\mathbb{Q}[1/\pi]\subset\mathrm{Frac}\, W(F)$ (car $\pi=[\varepsilon]-1$ est un élément non nul de $W(E)\subset W(F)$). Je note ρ la projection

$$\rho: \mathrm{Frac}\, W(F)\to\mathrm{Frac}\, W(F)/(\varphi-1)(\mathrm{Frac}\, W(F)).$$

Proposition. *Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, on a $K^r_{adm}=K$. En outre, si $a\in K$, on a*[2]

$$\delta^r(a)=\partial_W(\rho(\tau_r a))\otimes t^r.$$

(Autrement dit, pour tout $g\in G_L$, on a $\delta^r(a)(g)=\partial_W(\rho(\tau_r a))(g)\otimes t^r$. En particulier, le membre de droite est indépendant du choix du générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$).

Remarque. L'idée de tronquer la série formelle donnant t comme le logarithme de $1+\pi$ se trouve dans l'article de Kato sur les lois de réciprocité explicites [K].

[2] où $t=\log(1+\pi)$

2.5. *L'anneau* A_{suf}. Je vais poser $S_1 = \tilde{S}$ et je vais noter $\bar{S}_1$ la fermeture intégrale de S_1 dans R. C'est un anneau intègre intégralement clos dont le corps des fractions s'identifie à $\bar{F}$. Je peux considérer $W(\bar{S}_1)$ comme un sous-anneau de $W(R)$, stable par φ et par G_K. On a $\pi \in W(\bar{S}_1)$ et je vais noter A_{suf} (suf = suffisant) l'anneau $\Sigma^{-1} \cdot W(\bar{S}_1)$, où Σ est la partie multiplicative de $W(\bar{S}_1)$ engendrée par les $\varphi^m(\pi)$, pour $m \in \mathbb{N}$. Bien sûr, je peux voir A_{suf} comme un sous-anneau de Frac $W(\bar{F})$, stable par G_K et φ.

Mais je peux aussi le voir comme un sous-anneau (stable par les mêmes bêtes) de B_{cris}. Il me suffit pour cela de vérifier que les $\varphi^m(\pi)$ sont inversibles dans B_{cris}. Pour $m=0$, cela résulte de ce que, si $\eta = \sum_{m \in \mathbb{N}} (-1)^m \cdot \pi^m/(m+1)$, c'est une unité de B_{cris}^+ et $t = \pi\eta$, donc $B_{\mathrm{cris}} = B_{\mathrm{cris}}^+[\pi^{-1}]$. Au passage, tu remarqueras (je vais en avoir besoin) que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $t^{-r} B_{\mathrm{cris}}^+ = \pi^{-r} B_{\mathrm{cris}}^+$.

Par ailleurs, j'ai $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 = p\pi w$, avec

$$w = \sum_{1 \leqq i \leqq p-1} p^{-1} \binom{p}{i} \pi^{i-1} + p^{-1} \pi^{p-1}$$

et l'on vérifie facilement que w est une unité de A_{cris}; donc $\varphi^m(\pi) = p^m \pi \cdot w \cdot \varphi w \cdot \varphi^2 w \ldots \varphi^{m-1} w$, qui est un produit d'éléments inversibles dans B_{cris}.

2.6. *Démonstration de la proposition* 2.4. Il s'agit de prouver que tout $a \in K$ est dans K_{adm}^r et vérifie la formule requise. Soit n un entier tel que $p^n \lambda_{m,r} \in W$ pour $o \leqq m \leqq r$. Quitte à multiplier a par une puissance de p, on peut supposer que $a \in p^n W$.

Pour tout $\alpha \in \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{cris}}^+$ vérifiant $(p^{-r}\varphi - 1)(\alpha) = a$ (je ne sais pas encore qu'un tel α existe, mais peu importe), j'ai, pour tout $g \in G_L$, $\delta^r(a)(g) = (g-1)(\alpha)$. En posant, dans B_{cris}, $b = t^{-r} a$ et $\beta = t^{-r}\alpha$, cela revient à dire que, quelque soit $\beta \in \mathrm{Fil}^0(t^{-r} B_{\mathrm{cris}}^+)$ vérifiant $(\varphi - 1)(\beta) = b$, j'ai

$$\delta^r(a)(g) = (g-1)(\beta) \otimes t^r, \text{ pour tout } g \in G_L.$$

D'autre part, pour tout $\beta' \in \mathrm{Frac}\, W(\bar{F})$ vérifiant $(\varphi - 1)(\beta') = \tau_r a$, j'ai

$$\partial_W(\rho(\tau_r a))(g) = (g-1)(\beta'), \text{ pour tout } g \in G_L.$$

Je pose $\tau_r' = \pi^r \tau_r = \sum_{0 \leqq m \leqq r} \lambda_{m,r} \pi^m$. Comme $\bar{S}_1$ est intégralement clos dans son corps des fractions, lequel est algébriquement clos, et comme v'^r et $\tau_r' a \in W(\bar{S}_1)$, je peux trouver $\gamma \in W(\bar{S}_1)$ tel que

$$\varphi(\gamma) - v'^r \gamma = \tau_r' a.$$

Si je pose $\beta_0 = (\pi')^{-r} \gamma$, alors $\beta_0 = \pi^{-r} v'^r \gamma \in A_{\mathrm{suf}} \cap t^{-r} B_{\mathrm{cris}}^+$ et vérifie

$$(\varphi - 1)\beta_0 = \pi^{-r}\varphi(\gamma) - (\pi')^{-r}\gamma = \pi^{-r}(\varphi(\gamma) - v'^r \gamma) = \pi^{-r}\tau_r' a = \tau_r a;$$

en particulier, $\partial_W(\rho(\tau_r a))(g) = (g-1)(\beta_0)$.

Mais, dans B_{cris}, $t^{-r}a=\tau_r a+c$, où $c=a\cdot(\sum_{m\geq 1}\lambda_{m+r,r}\pi^m)\in(\pi\cdot B^+_{\text{cris}})^{G_L}$. Mais $\varphi-1$ est bijectif sur $(\pi\cdot B^+_{\text{cris}})^{G_L}$ (la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}-\varphi^n(c)$ converge et sa somme d vérifie $(\varphi-1)(d)=c$). On voit donc que

$$\beta=\beta_0+d\in t^{-r}B^+_{\text{cris}}\text{ et vérifie }(\varphi-1)(\beta)=\tau_r a+c.$$

En particulier, cela démontre l'existence de $\alpha=t^r\beta$, i.e. que $a\in K^r_{adm}$.

Comme $\gamma\in W(\bar{S}_1)\subset B^+_{\text{cris}}$ et comme $\theta(\pi')=\varepsilon^{(1)}-1\neq 0$, $\beta_0\in\text{Fil}^0(t^{-r}B^+_{\text{cris}})$ et $\beta=\beta_0+d$ aussi. Donc, pour tout $g\in G_L$, $\delta^r(a)(g)=(g-1)(\beta_0+d)\otimes t^r=(g-1)(\beta_0)\otimes t^r=\partial_W(\rho(\tau_r a))(g)\otimes t^r$.

2.7. Exercice. Déduire de la proposition précédente que, si $r\geqq 2$, (et même si le corps résiduel n'est pas fini)

$$\delta^r: K\to\text{Hom}_\Gamma(G_L,\mathbb{Q}_p(r))$$

est un isomorphisme. Je ne l'ai pas fait, mais (si c'est vrai !) ça ne peut qu'être facile. C'est, sauf erreur, le résultat qui te manquait pour pouvoir affirmer que toute représentation ordinaire est semi-stable, i.e. le fait que toute extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(r)$, avec $r\geqq 2$, est cristalline (sans avoir besoin de supposer le corps résiduel fini).

2.8. Remarque. En utilisant le fait que tu connais bien que $B^+_{\text{cris}}=W(R)[1/p]+\text{Adhérence}(t^{r+1}B^+_{\text{cris}})$, tu observeras que, pour fabriquer α à partir de a, je peux remplacer a par n'importe quel élément de B^+_{cris}, i.e. j'obtiens une démonstration de la surjectivité de $p^{-r}\varphi-1$ nettement plus agréable que celle que j'avais fabriquée dans ma lettre à Messing. Dans la dite lettre, j'avais besoin d'une version faisceautisée de ça, mais ça marche pareil.

3 Les homomorphismes de Coates-Wiles

Je vais supposer, dans ce paragraphe, $p\neq 2$. Pour $p=2$, ça marche sûrement à un grain de sel près, mais j'ai la flemme de regarder.

3.1. L'isomorphisme de Coleman. On a une suite exacte courte

$$0\to S\to S^*\to\tilde{S}^*(=U)\to 0,$$

où la flèche $S\to S^*$ est l'application $a\mapsto\exp(pa)$. Le point est que cette suite est scindée canoniquement. De façon précise:

Proposition. *Soit* $\hat{U}=\{x\in S^*\mid N_f\,x=x\}$.
(i) *Le groupe* S^* *est le produit direct de* Im $\exp(p-)$ *par* $\hat{U}$.
(ii) *L'isomorphisme de* $\hat{U}$ *sur* U *induit par la réduction* mod p *est l'inverse de l'isomorphisme de Coleman* (i.e. de l'application $u\mapsto g_u$ du théorème 2.2 de [BK]).

3.2. Preuve. Pour (i), on constate que, pour tout $x \in S$, on a $N_f(x) \equiv x \pmod p$ tandis que $T_f(x) \equiv 0 \bmod p$; et que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S^* & \longrightarrow & \tilde{S}^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle T_f} & & \downarrow{\scriptstyle N_f} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S^* & \longrightarrow & \tilde{S}^* & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \to (S)_{T_f=1} \to (S^*)_{N_f=1} \to \tilde{S}^* \to S/(T_f-1)S,$$

et $T_f \equiv 0 \pmod p$ implique que $(S)_{T_f=1} = S/(T_f-1)S = 0$.

L'assertion (ii) résulte de (i) si l'on remarque (c'est immédiat sur la définition) que l'isomorphisme de Coleman est une section de la projection de S^* sur $\tilde{S}^*$, dont l'image est contenue dans $\hat{U}$.

3.3. Un petit rabiot. On peut dire un tout petit peu mieux: dans ce qui précède, je peux remplacer S^* (resp. $\tilde{S}^*$) par $(S[1/\pi])^*$ (resp. $(\tilde{S}[1/\tilde{\pi}])^* = (\operatorname{Frac} \tilde{S})^*$). On a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Col}: (\operatorname{Frac} \tilde{S})^* \cong ((S[1/\pi])^*)_{N_f=1}.$$

C'est l'unique section de la projection de $(S[1/\pi])^*$ sur $(S[1/\pi])^*$ dont l'image est contenue dans $((S[1/\pi])^*)_{N_f=1}$. On a $\operatorname{Col}(\tilde{\pi}) = \pi$.

3.4. Coates-Wiles. Comme t est une uniformisante de B_{dR}, je peux considérer A_{cris} et $K[\![t]\!]$ comme des sous-anneaux de B_{dR}, j'ai $t \in A_{\mathrm{cris}} \cap K[\![t]\!]$ et l'image de S par l'application composée $S \hookrightarrow W(R) \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$ est contenue dans $A_{\mathrm{cris}} \cap K[\![t]\!]$ (on a $\sum a_m \pi^m = \sum a_m (e^t-1)^m$).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $S \cap \operatorname{Fil}^m B_{\mathrm{dR}}$ est l'idéal engendré par π^m. Si $s \in S^*$, je peux l'écrire $s = [s_0] \cdot s^+$, où $s_0 \in k^*$ et $s^+ \equiv 1 \pmod{(p, \pi)}$. Je peux définir $\log(s) = \log(s^+) = -\sum (-1)^m m^{-1} (s^+ - 1)^m \in A_{\mathrm{cris}} \cap K[\![t]\!]$; je peux donc écrire

$$\log(s) = \sum_{r \geqq 1} \psi_{\mathrm{CW}}^r(s) \cdot t^r = \sum_{r \geqq 1} \psi_{\mathrm{CW}}^r(s),$$

avec les $\psi_{\mathrm{CW}}^r(s) \in K$ et $\psi_{\mathrm{CW}}^r(s) = \psi_{\mathrm{CW}}^r(s) \cdot t^r$.

Pour tout entier $r \geqq 1$, on dispose donc d'un homomorphisme canonique

$$\Psi_{\mathrm{CW}}^r : S^* \to K(r) = K \cdot t^r.$$

L'homomorphisme de Coates-Wiles noté Φ_{CW}^r dans [BK, § 2] est défini par $\Phi_{\mathrm{CW}}^r = r! \cdot \Psi_{\mathrm{CW}}^r \circ \operatorname{Col}$; autrement dit

$$\Phi_{\mathrm{CW}}^r(u) = r! \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r(\operatorname{Col}(u)) \otimes t^r, \text{ pour tout } u \in U = \tilde{S}^*.$$

Il me sera commode de convenir que, si $u \in U$, alors $\psi_{\mathrm{CW}}^r(u) = \psi_{\mathrm{CW}}^r(\operatorname{Col}(u))$.

4 Le théorème de Bloch-Kato

4.1. Enoncé. Je suppose maintenant le corps résiduel fini. Alors la théorie du corps de classes, pour chacun des corps K_n, induit, par passage à la limite, un homomorphisme de Γ-modules,

$$\iota_0 : U \to G_L^{\mathrm{ab}},$$

d'où une application de $\mathrm{Hom}_\Gamma(G_L, \mathbb{Q}_p(r))$ dans $\mathrm{Hom}_\Gamma(U, \mathbb{Q}_p(r))$. Je vais noter $\bar{\delta}^r : K \to \mathrm{Hom}_\Gamma(U, \mathbb{Q}_p(r))$ le composé de δ^r avec elle. Comme Bloch et Kato, je vais noter

$$T\colon \mathrm{Hom}_\Gamma(U, K(r)) \to \mathrm{Hom}_\Gamma(U, \mathbb{Q}_p(r))$$

l'homomorphisme obtenu en composant avec l'application de $K(r)$ dans $\mathbb{Q}_p(r)$ qui à $x \otimes t^r$ associe $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}(x) \otimes t^r$.

Le théorème 2.1 de [BK] s'énonce alors:

Théorème. *Si $r \geqq 1$ et si $a \in K$, on a*

$$\bar{\delta}^r(a) = T(a \cdot \Phi_{\mathrm{CW}}^r)/(r-1)!.$$

4.2. Démonstration (début). On se ramène d'abord à la théorie du corps de classes en caractéristique p. Pour cela, je te rappelle que $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sép}}/E)$ s'identifie à G_L et que U s'identifie au groupe des unités de l'anneau des entiers $\tilde{S} = S_1$ de E. Comme $E = k((\tilde{\pi}))$, la théorie du corps local en caractéristique p nous fournit un homomorphisme

$$\iota_p : U \to G_L^{\mathrm{ab}}.$$

C'est raisonnable de penser que $\iota_0 = \iota_p$. Non seulement c'est raisonnable, mais c'est un théorème de Laubie [L, théorème 3.2.2].

Grâce à Laubie et à la proposition 2.4, je suis ramené à comparer la théorie des extensions cycliques de degré p^n de E donnée par les vecteurs de Witt avec celle qui est donnée par le corps de classes local. Mais cela a été fait par Witt en 1937 [Wit, Satz 18, p. 139]; j'ai trouvé la référence dans [Se, chap, XIV, § 5], ainsi que la description du cas $n = 1$ (Artin-Schreier) due à Schmid).

4.3. Démonstration (suite). Pour te montrer qu'il m'arrive d'être sérieux, je vais faire l'exercice consistant à vérifier que quand on applique le résultat de Witt on trouve bien la même formule que Bloch et Kato.

Je vais commencer par un lemme, qui se déduit par passage à la limite du théorème de Witt.

Pour cela, pour tout $u \in E^*$, je note $g_u \in G_E^{\mathrm{ab}} = G_L^{\mathrm{ab}}$ l'élément donné par l'isomorphisme de réciprocité. Si $x \in \mathrm{Frac}\, W(F)$ et si $u \in E^*$, je pose

$$[x, u) = g_u(\xi) - \xi \, (\in \mathbb{Q}_p),$$

où $\xi \in \mathrm{Frac}\, W(\bar{F})$ vérifie $\varphi(\xi) - \xi = x$.

J'ai $S[1/\pi] = W((\pi)) \subset W(E) \subset W(F)$ et j'ai défini au § 3 l'homomorphisme de Coleman

$$\mathrm{Col} : E^* \to (S[1/\pi])^*.$$

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, si* $x \in S[1/\pi]$ *et* $u \in E^*$, *on a*

$$[x, u) = \mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Res}(x \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u)))).$$

Le lemme implique le théorème (le théorème est en fait équivalent au lemme restreint à u unité de $\tilde{S}^*$, puisque tout élément de $W((\pi))$ s'écrit, modulo $\pi W[\![\pi]\!]$, comme une somme finie d'éléments de la forme $\tau_r a$): Je te rappelle que, pour tout $u \in U = \tilde{S}^*$, j'ai posé

$$\log(\mathrm{Col}(u)) = \sum_{m \geqq 1} \psi_{\mathrm{CW}}^m(u)\, t^m,$$

et que $\Phi_{\mathrm{CW}}^r = r! \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r \otimes t^r$. Si, pour $a \in K$, je note $\bar{\partial}_W(\rho(\tau_r a))$ l'image de $\partial_W(\rho(\tau_r a))$ dans $\mathrm{Hom}(U, \mathbb{Q}_p)$, on est donc ramené à prouver que

$$\bar{\partial}_W(\varrho(\tau_r a)) \otimes t^r = \mathrm{Tr}(a \cdot r! \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r) \otimes t^r/(r-1)!,$$

i.e. que $\bar{\partial}_W(\rho(\tau_r a)) = \mathrm{Tr}(a r \psi_{\mathrm{CW}}^r)$ ou encore que, pour tout $u \in U$,

$$[\tau_r a, u) = \mathrm{Tr}(a r \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r(u)).$$

Il est clair qu'il suffit de le prouver pour a tel que $\tau_r a \in W((\pi))$; je peux appliquer le lemme et je trouve que

$$[\tau_r a, u) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Res}(\tau_r a \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u)))).$$

Pour calculer ce résidu, je peux considérer $W((\pi))$ comme un sous-anneau de $K((\pi)) = K((t))$. Comme $\tau_r \equiv t^{-r} \mod K[\![t]\!]$, on a $\mathrm{Res}(\tau_r a \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))) = \mathrm{Res}(t^{-r} a \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))) = \mathrm{Res}(a t^{-r} \cdot \sum m \psi_{\mathrm{CW}}^m(u)\, t^{m-1}) = a r \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r(u)$ et $[\tau_r a, u) = \mathrm{Tr}(a r \cdot \psi_{\mathrm{CW}}^r(u))$.

4.4. Il me reste à *prouver le lemme.* (Pour ne rien te chacher, bien qu'a posteriori il n'ait pas l'air méchant, c'est lui qui m'a donné le plus de mal; il m'a fallu Bloch et Kato pour me convaincre que c'était la formule exacte. Après, c'est comme les problèmes d'examen: c'est beaucoup plus facile quand on connaît le résultat !)

Il me faut d'abord énoncer le théorème de Witt (attention aux fautes de frappe, dans [Se] – du moins dans la version anglaise – et surtout dans [Wit]).

On peut le dire ainsi: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $z \in W_n(E)$ et si $u \in E^*$, je note $[z, u)_n \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \subset W_n(E)$, l'élément défini par

$$[z, u)_n = g_u(\xi_n) - \xi_n,$$

où $\xi_n \in W_n(E^{\text{sép}})$ vérifie $\varphi(\xi_n) - \xi_n = z$.

Je peux considérer l'anneau $S_n = W_n((\pi)) = S/p^n$ comme un relèvement mod p^n de $E = k((\tilde{\pi}))$. Je dispose d'un homomorphisme

$$w_{n-1} : W_n(E) \to S_n,$$

à savoir celui qui, à $(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ associe $\sum_{0 \leqq j \leqq n-1} p^j \cdot (\hat{z}_j)^{p^{n-1-j}}$, où $\hat{z}_j$ désigne un relèvement quelconque de z_j dans S_n.

Alors, Witt *dixit*, si $z \in W_n(E)$ et si $\hat{u}$ est une unité de S_n relevant $u \in E^*$, on a

$$[z, u)_n = \mathrm{Tr}(\mathrm{Res}_\pi(w_{n-1}(z) \cdot \hat{u}^{-1}\, d\hat{u}),$$

où Tr (resp. Res_π) est l'application induite par réduction mod p^n de $\mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}$ (resp. Res).

Le lemme revient à prouver que, pour tout n, si $x_{<n}$ désigne l'image de $x \in W((\pi)) \subset W(E)$ dans $W_n(E)$, on a

$$[x_{<n}, u)_n \equiv \mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Res}(x \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u)))) \bmod p^n.$$

Comme $w_{n-1}(x_{<n})$ n'est autre que la réduction mod p^n de $\varphi^{n-1}(x)$, et comme pour tout $\lambda \in W$, $\mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\varphi^{n-1}(\lambda)) = \mathrm{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\lambda)$, il suffit de vérifier le lemme suivant:

4.5. Lemme. *Si $x \in W((\pi))$, si $u \in E^*$ et si $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{Res}(\varphi^m(x) \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))) = \varphi^m(\mathrm{Res}(x \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u)))).$$

4.6. Je choisis $d \in \mathbb{N}$. Comme au n° 1.2, je pose $\pi' = \varphi^{-1}(\pi)$. J'ai $(1+\pi')^p = 1+\pi$, ce qui me permet d'identifier $S = W[\![\pi]\!]$ à un sous-anneau de $S' = W[\![\pi']\!]$, et aussi $S_d = S/p^d$ à un sous-anneau de $S'_d = S'/p^d$. Je vais noter A (resp. A') l'anneau obtenu à partir de S_d (resp. S'_d) en rendant inversible l'image de π (resp. π'). L'image de π dans A' est maintenant congrue à celle de $(\pi')^p$ mod p et est donc inversible et je peux considérer A comme un sous-anneau de A'. Pour tout $y \in W((\pi))$, je note $\bar{y}$ son image dans A. Mêmes notations avec $W((\pi'))$ et A'.

L'application φ^{-1} est un isomorphisme de S sur S' qui induit un isomorphisme de A sur A'. Si ζ est une racine primitive p-ième de 1, je note A_d la réduction modulo p^d de $W[\zeta] \subset \bar{K}$ et $A'' = A_d((\bar{\pi}')) = A_d \otimes_{W_d} A'$. Pour tout $\varepsilon \in \mu_p(\bar{K})$, je note γ_ε l'unique A_d-automorphisme continu de A'' qui envoie $1+\bar{\pi}'$ sur $\varepsilon(1+\bar{\pi}')$. Je note encore $\varphi^{-1}: A \cdot d\bar{\pi} \to A' \cdot d\bar{\pi}'$ et $\gamma_\varepsilon: A'' \cdot d\bar{\pi}_m \to A'' \cdot d\bar{\pi}_m$, les applications induites par les homomorphismes d'anneaux du même nom. Enfin, je note

$$\mathrm{tr}: A'' \cdot d\bar{\pi}_m \to A \cdot d\bar{\pi}_m$$

l'application $\omega \to \sum_{\varepsilon \in \mu_p(\bar{K})} \gamma_\varepsilon(\omega)$ (c'est induit par une trace, mais ce n'est pas la même extension que celle qui donne Tr !).

Lemme. *Avec les notations qui précèdent, pour tout $\omega \in A\, d\bar{\pi}$, on a*

$$\mathrm{Res}(\mathrm{tr}(\varphi^{-1}(\omega)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Res}(\omega)).$$

4.7. Vérifions que *le lemme* 4.6 *implique le lemme* 4.5: Par induction, il suffit de le vérifier pour $m=1$. Cela revient à montrer que, pour tout d,

$$\mathrm{Res}(\varphi(x) \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))) \equiv \varphi(\mathrm{Res}(x \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))))(\bmod p^d).$$

Il n'y a qu'à appliquer le lemme 4.6 à l'image ω de $\varphi(x) \cdot d_{\log}(\mathrm{Col}(u))$ dans $A\, d\bar{\pi}$, car $\varphi^{-1}(\omega) = x \cdot \varphi^{-1}(d_{\log}(\mathrm{Col}(u)))$ (mod p^d), tr est A-linéaire et, par définition de Col, tr(image de $\varphi^{-1}(d_{\log}(\mathrm{Col}(u))) =$ image de $d_{\log}(\mathrm{Col}(u))$.

4.8. Enfin, prouvons le lemme 4.6: Quitte à remplacer d par $d+1$, il suffit de vérifier que

$$p \cdot \mathrm{Res}(\mathrm{tr}(\varphi^{-1}(\omega))) = p \cdot \varphi^{-1}(\mathrm{Res}(\omega)).$$

Avec des notations évidentes, il est clair que

$$\mathrm{Res}_{\bar{\pi}'} \cdot \varphi^{-1}(\omega) = \varphi^{-1}(\mathrm{Res}_{\bar{\pi}}(\omega)),$$

que, pour tout $\omega' \in A'' \, d\bar{\pi}'$ et tout $\varepsilon \in \mu_p(\bar{K})$, $\mathrm{Res}_{\bar{\pi}'}(\gamma_\varepsilon(\omega')) = \mathrm{Res}_{\bar{\pi}}(\omega')$, donc que $\mathrm{Res}_{\bar{\pi}'} \mathrm{tr}(\omega')) = p \cdot \mathrm{Res}_{\bar{\pi}'}(\omega')$, ce qui fait qu'il suffit de vérifier ce dernier lemme:

4.9. Sous-lemme. *Avec des notations évidentes, si $\omega \in A \cdot d\pi$, on a*

$$\mathrm{Res}_{\bar{\pi}'}(\omega) = p \cdot \mathrm{Res}_{\bar{\pi}}(\omega).$$

Preuve. Il suffit de le vérifier pour $\omega = a\bar{\pi}^{-r} \cdot d\bar{\pi}$, avec $a \in W_d$ non nul et $r \in \mathbb{Z}$. C'est clair si $r \leqq 0$. Supposons $r > 0$. Comme $\bar{\pi} = (1+\bar{\pi}')^p - 1$, on a

$$\omega = a(\bar{\pi}')^{-rp} \cdot \eta \cdot p \cdot (1+\bar{\pi}')^{p-1} \cdot d\bar{\pi}',$$

où η est un polynôme en $1/\pi'$ dont le terme constant vaut 1. On a $\omega = \alpha(1/\bar{\pi}') \, d\pi_m$, où $\alpha(1/\bar{\pi}')$ est un polynôme en $1/\bar{\pi}'$ dont le terme de plus bas degré est $pa(\bar{\pi}')^{-rp+p-1}$. Le résidu est donc nul sauf si $r=1$, auquel cas c'est pa. C'est bien ce qu'on voulait.

Références

[BK] Bloch, S., Kato, K.: L-functions and Tamagawa numbers of motives. In: The Grothendieck Festschrift, vol 1 (Prog. Math., vol. 86, pp. 333–400) Boston: Birkhäuser 1990

[F] Fontaine, J.-M.: Représentations p-adiques. In: Proc. Int. Congress Math., Warsawa, pp. 475–486

[FW] Fontaine, J.-M., Wintenberger, J.-P.: Le «corps des normes» de certaines extensions algébriques de corps locaux. C.R. Acad. Sci. **288**, 367 370 (1979)

[K] Kato, K.: The explicit reciprocity law and the cohomology of Fontaine-Messing. Bull. Soc. Math. Fr. **119**, 397–441 (1991)

[L] Laubie, F.: Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux. Compos. Math. **67**, 165 189 (1988)

[Se] Serre, J.-P.: Local Fields. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979

[Win] Wintenberger, J.-P.: Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; applications. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **16**, 59–89 (1983)

[Wit] Witt, E.: Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p (*sic.*) J. Reine Angew. Math. **176**, 126 140 (1937)