Annals of Mathematics, 115 (1982), 529–577

Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate

Par Jean-Marc Fontaine*

Table des matières

1. Représentations de Hodge-Tate 532
2. Construction du corps B_{DR} 534
3. Représentations de de Rham 545
4. L'anneau B 549
5. Représentations cristallines et potentiellement cristallines 560
6. Applications aux groupes p-divisibles 564
Appendice: Quelques conjectures sur la cohomologie des variétés algébriques sur les corps locaux. 569
Bibliographie 576

Introduction

Dans tout cet article, K est un corps local de caractéristique 0, dont le corps résiduel k est supposé parfait de caractéristique $p \neq 0$. On désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique fixée de K et on pose $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

On note $\underline{\mathrm{Rep}(G)}$ la catégorie des *représentations p-adiques* (sous-entendu de G), i.e. des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G.

Par exemple, si X est une variété projective non singulière sur K, et si pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose

$$H^i_{\text{ét}}(X) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim H^i_{\text{ét}}\big(X \times_K \overline{K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\big),$$

les $H^i_{\text{ét}}(X)$ sont des représentations p-adiques.

*Je remercie la N.S.F., The Institute for Advanced Study et The University of California at Irvine pour leur hospitalité et/ou leur soutien financier.

003–486X/82/0115-3/0529/049\$4.90/1

On se propose d'introduire une succession de sous-catégories pleines de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, "emboitées" les unes dans les autres, $\underline{\mathrm{Rep}}(G) \supset \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G) \supset \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G) \supset \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G) \supset \underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$, qui sont des sous-$\otimes$-catégories (i.e. qui sont stables par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual).

1. *La sous-catégorie* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ *des représentations de Hodge-Tate.* Le groupe G opère par continuité sur le complété C de $\bar{K}$. Soit

$$\chi\colon G \to \mathbf{Z}_p^*$$

le caractère qui donne l'action de G sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p de $\bar{K}$. Si V est une représentation p-adique, on sait (cf. [Se2], §2) que, pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$V_C^i = \left\{u \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \mid gu = \chi^i(g) \cdot u, \text{ pour tout } g \in G\right\}$$

est un K-espace vectoriel de dimension finie, nulle pour presque tout i, et que $\sum_{i \in \mathbf{Z}} \dim_K V_C^i \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. On dit que V est *de Hodge-Tate* si on a l'égalité.

Si X est une variété projective non singulière sur K, une conjecture de Tate affirme que les $H_{\text{ét}}^i(X)$ sont de Hodge-Tate; c'est un théorème bien connu (Tate-Raynaud) lorsque X est une variété abélienne.

L'étude des représentations de Hodge-Tate est l'objet du chapitre 1. On construit notamment une K-algèbre graduée B_{HT} sur laquelle G opère. On dispose alors d'un foncteur additif exact et fidèle, compatible avec les produits tensoriels, de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ dans celle des K-espaces vectoriels gradués de dimension finie: c'est celui qui à V associe $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V) = (B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$.

2. *La sous-catégorie* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ *des représentations de de Rham.* Dans le chapitre 2, on construit un corps commutatif B_{DR}, contenant $\bar{K}$, sur lequel G opère. Ce corps est complet pour une valuation discrète et son corps résiduel s'identifie à C. La valuation définit donc une filtration de B_{DR}; l'algèbre graduée associée s'identifie à B_{HT}.

Pour toute représentation p-adique V, on pose $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V) = (B_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$. C'est un K-espace vectoriel filtré de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbf{Q}_p$. On dit que V est de *de Rham* si on a l'égalité (alors V est aussi de Hodge-Tate et $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ s'identifie au gradué associé à $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$).

Si X est une variété projective non singulière sur K, je conjecture que les $H_{\text{ét}}^i(X)$ sont de de Rham. C'est un théorème lorsque X est une variété abélienne.

L'étude des représentations de de Rham est l'objet du chapitre 3. La restriction du foncteur $\underline{D}_{\mathrm{DR}}$ à la catégorie des représentations de de Rham est un foncteur additif, exact et fidèle, compatible avec les produits tensoriels, de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ dans celle des K-espaces vectoriels filtrés de dimension finie.

3. *Les sous-catégories* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ *des représentations cristallines et* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G)$ *des représentations potentiellement cristallines.* Soit K_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et soit σ le Frobenius absolu opérant sur K_0. Au chapitre 4, on construit un anneau commutatif B contenant K_0, sur lequel G opère, muni d'un automorphisme F de la structure d'anneau, induisant σ sur K_0 et commutant à l'action de G, ainsi qu'un plongement de $\bar{K} \otimes_{K_0} B$ dans B_{DR}.

L'anneau B se trouve être un anneau de Barsotti-Tate (et même un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate) au sens de [Fo2] (nos. 2.2.4 et 7.2.1). En particulier, pour toute représentation p-adique V, si on pose $\underline{D}_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$, on a $\dim_K \underline{D}_B(V) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. On dit que V est *cristalline* si on a l'égalité (ce qui revient à dire que V est B-admissible au sens de [Fo2]).

Au chapitre 6, on montrera que B est adapté aux groupes p-divisibles (ce qui signifie essentiellement que les représentations p-adiques associées aux groupes p-divisibles sont cristallines): ceci démontre l'existence, annoncée dans [Fo2], p. 45 et 67, d'un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles et constitue le résultat essentiel de ce travail.

Si X est une variété projective non singulière sur K "*ayant bonne réduction*", i.e. admettant un prolongement propre et lisse sur Spec $\mathcal{O}_K$, je conjecture que les $H^i_{\text{ét}}(X)$ sont des représentations cristallines. C'est un théorème lorsque X est une variété abélienne.

Si V est une représentation cristalline, $\underline{D}_B(V)$ est un module filtré B-admissible au sens de [Fo2], no. 3.6.4, et on a montré dans [Fo2] que $\underline{D}_B$ induit une équivalence, compatible avec les produits tensoriels, entre la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ et la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ des modules filtrés B-admissibles. Dans le chapitre 5, on donne quelques compléments à [Fo2] sur les représentations cristallines, ainsi que des rappels rapides sur les représentations potentiellement cristallines (ou potentiellement B-admissibles), i.e. les représentations p-adiques V qui, lorsqu'on les restreint à un sous-groupe ouvert convenable G' de G, deviennent cristallines, c'est-à-dire des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G')$.

Dans un appendice enfin, on énonce quelques *conjectures sur la cohomologie des variétés algébriques sur les corps locaux*. Par exemple, si X est une variété projective non singulière sur K, on conjecture que $\underline{D}_{DR}(H^i_{\text{ét}}(X))$ s'identifie à $H^i_{\mathrm{DR}}(X)$. Si on suppose de plus que X a bonne réduction, on conjecture que $\underline{D}_B(H^i_{\text{ét}}(X))$ s'identifie à $K_0 \otimes_{W(k)} H^i_{\mathrm{cris}}(\mathfrak{X}_k, W(k))$, où $\mathfrak{X}_k$ est la fibre spéciale d'un prolongement propre et lisse de X à Spec $\mathcal{O}_K$.

1. Représentations de Hodge-Tate

1.1. Rappelons la définition des modules de Hodge-Tate (cf. [Se2], §2): Le groupe G opère, par continuité, sur le complété C de $\overline{K}$. Soit U un C-espace vectoriel de dimension finie sur lequel G opère continûment et semi-linéairement (i.e. $g(u + u') = gu + gu'$ et $g(cu) = gc \cdot gu$, si $g \in G$, $c \in C$ et $u, u' \in U$). Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, soit

$$U^i = \{u \in U \mid gu = \chi^i(g) \cdot u, \text{pour tout } g \in G\}$$

(où $\chi\colon G \to \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique, i.e. le caractère qui donne l'action de G sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Les U^i sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, nulle pour presque tout i, et l'application évidente

$$\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (C \otimes_K U^i) \to U$$

est injective; on dit que U est un *module de Hodge-Tate* si c'est un isomorphisme.

Enfin, si V est une représentation p-adique de G, on dit que V *est de Hodge-Tate* si $V_C = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, muni de l'action évidente de G, est un module de Hodge-Tate.

1.2. Posons $T = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ (où $T_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}) = \varprojlim \boldsymbol{\mu}_{p^n}$). C'est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension un sur lequel G opère à travers le caractère χ.

Notons $B_{\mathrm{HT}}^+ = C[T]$ la C-algèbre $C \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Sym}_{\mathbf{Q}_p} T$ et $B_{\mathrm{HT}} = C[T, T^{-1}]$ l'algèbre déduite de B_{HT}^+ en rendant inversible un élément non nul de T. L'anneau commutatif B_{HT} est une C-algèbre graduée sur laquelle G opère semi-linéairement et continûment. Avec des conventions évidentes, si t est un élément non nul de T, tout élément de B_{HT} s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\sum_{i \in \mathbf{Z}} c_i t^i, \quad \text{avec les } c_i \in C, \text{ presque tous nuls;}$$

on a $g(\Sigma c_i t^i) = \Sigma g c_i \cdot \chi^i(g) \cdot t^i$, pour tout $g \in G$, et $gr^i B_{\mathrm{HT}} = \{ct^i \mid c \in C\}$.

1.3. Notons $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels gradués, de graduation indexée par $\mathbf{Z}$: Un objet D de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ est donc un K-espace vectoriel, muni d'une décomposition en somme directe de sous-K-espaces vectoriels

$$D = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} gr^i D;$$

un morphisme $\varphi\colon D = \oplus gr^i D \to D' = \oplus gr^i D'$ est une application K-linéaire des K-espaces vectoriels sous-jacents telle que $\varphi(gr^i D) \subset gr^i D'$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

La catégorie $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ est abélienne et K-linéaire (i.e., si D et D' sont des objets de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$, $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Grad}}_K}(D, D')$ est, canoniquement et fonctoriellement, un K-espace vectoriel).

Si D' et D'' sont deux objets de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$, *le produit tensoriel* $D' \otimes D''$ est, par définition, l'objet D de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est $D' \otimes_K D''$, la graduation étant donnée par

$$gr^i D = \bigoplus_{i'+i''=i} \left(gr^{i'}D'\right) \otimes_K \left(gr^{i''}D''\right), \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z}.$$

Désignons par K l'objet de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est K lui-même, la graduation étant donnée par

$$gr^i K = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \\ K & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Alors K est un *objet-unité* de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$, i.e., pour tout objet D de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$, on a $K \otimes D \simeq D \otimes K \simeq D$.

Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$, son *dual* D^* est, par définition, l'objet de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est le dual du K-espace vectoriel sous-jacent à D, la graduation étant définie par

$$gr^i D^* = \left(gr^{-i}D\right)^* = \left(\bigoplus_{j\neq -i} gr^j D\right)^{\perp}.$$

Enfin, on note $\underline{\mathrm{Grad}}_K^{\varphi}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ formée des objets dont le K-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie.

1.4. *Remarque*. Dans la terminologie de Saavedra ([Sa]), $\underline{\mathrm{Grad}}_K^{\varphi}$ est une catégorie tannakienne, neutre, et le foncteur qui à D associe le K-espace vectoriel sous-jacent est un foncteur fibre; le groupe des $\otimes$-automorphismes de ce foncteur fibre est le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{m/K}$ et $\underline{\mathrm{Grad}}_K^{\varphi}$ s'identifie à la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de $\mathbf{G}_{m/K}$.

1.5. Pour toute représentation p-adique V, posons

$$\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V) = \left(B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^G \qquad \text{et} \qquad \underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B_{\mathrm{HT}}).$$

Il est clair que $\underline{D}_{\mathrm{HT}}$ (resp. $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}$) peut être considéré comme un foncteur covariant (resp. contravariant) additif (et même $\mathbf{Q}_p$-linéaire) de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans $\underline{\mathrm{Grad}}_K$ (pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $gr^i\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V) = (gr^iB_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ et $gr^i\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, gr^iB_{\mathrm{HT}})$).

La proposition suivante est une conséquence, à peu près complètement triviale (mêmes idées de démonstration que celles des propositions 3.4.1 et 3.4.3 de [Fo2]), des résultats rappelés au no. 1.1:

1.6. PROPOSITION. i) *Pour toute représentation p-adique* V, $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ *et* $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V)$ *sont des objets de* $\underline{\mathrm{Grad}}^{\varphi}_K$ (*la dimension de chacun des* K-*espaces vectoriels sous-jacents est inférieure ou égale à la dimension de* V *sur* $\mathbf{Q}_p$).

ii) *La sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ *de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, *formée des représentations qui sont de Hodge-Tate, est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual.*

iii) *Une représentation p-adique* V *est de Hodge-Tate si et seulement si* $\dim_K \underline{D}_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$, *ou encore si et seulement si* $\dim_K \underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$; *la restriction à* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ *de* $\underline{D}_{\mathrm{HT}}$, *aussi bien que de* $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}$, *est un foncteur exact et fidèle.*

iv) *Si* V *et* V' *sont deux représentations de Hodge-Tate,* $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V \otimes V')$ (*resp.* $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V \otimes V')$) *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, à* $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V) \otimes \underline{D}_{\mathrm{HT}}(V')$ (*resp.* $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V) \otimes \underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V')$).

v) *Si* V *est une représentation de Hodge-Tate, on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels* $D^*_{\mathrm{HT}}(V) \simeq \underline{D}_{\mathrm{HT}}(V^*) \simeq (\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V))^*$.

1.7. *Remarques.* a) L'assertion (ii) de la proposition signifie que $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (cf. [Sa]); on connaît fort peu de choses sur la structure du groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}}$, défini sur $\mathbf{Q}_p$, "enveloppe pro-algébrique de l'image de Galois" dans les représentations de Hodge-Tate (le groupe $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}}$ est aussi le groupe des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre qui, à toute représentation V de Hodge-Tate, associe le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent); voir cependant [Se3] et [Se4].

b) La proposition précédente implique que le foncteur $\underline{\omega}_{\mathrm{HT}}$, qui à V associe le K-espace vectoriel sous-jacent à $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V)$, est un foncteur fibre sur la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ à valeurs dans K; le groupe $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}}_?$ des $\otimes$-automorphismes de $\underline{\omega}_{\mathrm{HT}}$ est donc un groupe proalgébrique défini sur K, qui est une K-forme intérieure de $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}} \times_{\mathbf{Q}_p} K$ (cf. [Sa], chap. II, §4). J'ignore totalement ce que l'on peut dire du torseur qui fait passer de $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}} \times_{\mathbf{Q}_p} K$ à $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}}_?$.

2. Construction du corps B_{DR}

(Pour la commodité du lecteur, ce paragraphe contient, entre autres, certains extraits du § 3 de [F-L]).

On note A (resp. $\bar{A}$, resp. A_C) l'anneau des entiers de K (resp. $\bar{K}$, resp. C). On désigne par π une uniformisante de A.

2.1. Commençons par rappeler la construction de l'anneau R (cf. [Fo1], chap. V, no. 1.4, où R est noté $A_{R(C)}$, ou [F-W], §5): si f désigne l'endomorphisme de l'anneau $\bar{A}/p\bar{A}$ défini par $f(x) = x^p$, on note R la limite projective du diagramme

$$\bar{A}/p\bar{A} \xleftarrow{f} \bar{A}/p\bar{A} \xleftarrow{f} \cdots \xleftarrow{f} \bar{A}/p\bar{A} \xleftarrow{f} \bar{A}/p\bar{A} \xleftarrow{f} \cdots .$$

Un élément x de R peut donc être considéré comme la donnée d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\bar{A}/p\bar{A}$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$, pour tout n; l'addition et la multiplication se font composante par composante.

Si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in R$, et si on choisit, pour tout n, un relèvement $\hat{x}_n$ de x_n dans $\bar{A}$ (ou dans A_C), alors, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, la suite des $\hat{x}_{n+m}^{p^n}$ converge, pour $n \to +\infty$, vers un élément $x^{(m)} \in A_C$ qui ne dépend pas du choix des relèvements. L'application qui à x associe $(x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$, définit une bijection de R sur l'ensemble des familles $(x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ d'éléments de A_C qui vérifient $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$, pour tout m. Si l'on utilise cette bijection pour identifier R à l'ensemble de telles familles, et si $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ et $y = (y^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ sont deux éléments de R, on a

$$\begin{cases} xy = \left(x^{(m)}y^{(m)}\right)_{m \in \mathbf{Z}}, \\ x + y = \left(z^{(m)}\right)_{m \in \mathbf{Z}}, \qquad \text{avec } z^{(m)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(x^{(n+m)} + y^{(n+m)}\right)^{p^n}. \end{cases}$$

Soit v la valuation de A_C normalisée par $v(\pi) = 1$ (on écrira v_K au lieu de v s'il y a risque de confusion). Pour tout $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$, on pose $v_{R,K}(x) = v_R(x) = v(x^{(0)})$. Alors v_R est une valuation de R pour laquelle il est complet et R est intégralement clos dans son corps des fractions (qui est un corps valué, complet, algébriquement clos, de caractéristique p). Le corps résiduel de R s'identifie au corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{A}$; l'homomorphisme canonique de $\bar{k}$ dans R correspondant est celui qui, à $\varepsilon \in \bar{k}$, associe $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$, où $\varepsilon^{(m)}$ est le représentant de Teichmüller, dans A_C, de $\varepsilon^{p^{-m}}$

2.2. On note $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R. C'est donc l'ensemble des "vecteurs" de la forme

$$u = \left(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots\right), \quad \text{avec } u_n \in R, \text{ pour tout } n,$$

et l'addition et la multiplication sont données par les formules usuelles (cf., par exemple, [Se1], chap. II, §6).

L'anneau $W(R)$ est un anneau commutatif, intègre, de caractéristique 0. On munit $W(R)$ de la topologie produit, avec la topologie induite par v_R sur chaque composante. On obtient ainsi un anneau topologique, séparé et complet. En fait, si, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R, on note $W(\mathfrak{a})$ l'idéal de $W(R)$ formé des vecteurs de Witt dont toutes les composantes sont dans $\mathfrak{a}$, les $W(\mathfrak{a}) + p^n W(R)$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux non nuls de R et n les entiers positifs, sont des idéaux de $W(R)$ qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 et $W(R)$ s'identifie, en tant qu'anneau topologique, à la limite projective des $W(R)/(W(\mathfrak{a}) + p^n W(R))$, chaque quotient étant muni de la topologie discrète.

Pour tout $x \in R$, notons $[x] = (x, 0, \ldots, 0, \ldots)$ son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. Le fait que R est parfait implique que tout élément de $W(R)$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} p^n [v_n]$, avec les $v_n \in R$ (cette écriture a un sens car la topologie de $W(R)$ est moins fine que la topologie p-adique, et on a

$$(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \left[u_n^{p^{-n}}\right]).$$

2.3. L'anneau A est un $W(k)$-module libre de rang fini et la structure de k-algèbre de R fait de $W(R)$ une $W(k)$-algèbre. Nous notons $W_A(R)$ la A-algèbre $A \otimes_{W(k)} W(R)$, que l'on munit de la topologie du produit tensoriel. C'est encore un anneau commutatif, intègre, séparé et complet pour sa topologie. Les $A \otimes_{W(k)} W(\mathfrak{a}) + \pi^n W_A(R)$, pour $\mathfrak{a}$ idéal non nul de R et n entier positif, sont des idéaux de $W_A(R)$ qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0.

L'application $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $u \mapsto 1 \otimes u$) nous permet d'identifier A (resp. $W(R)$) à un sous-anneau fermé de $W_A(R)$. Tout élément de $W_A(R)$ s'écrit alors, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n [u_n], \qquad \text{avec les } u_n \in R.$$

On note encore $W_K(R)$ la K-algèbre $K \otimes_A W_A(R) = K \otimes_{W(k)} W(R)$, que l'on munit de la topologie du produit tensoriel. C'est un anneau commutatif intègre, séparé et complet pour sa topologie, contenant $W_A(R)$ comme sous-anneau fermé. En tant que A-module topologique, $W_K(R)$ s'identifie à la limite inductive du diagramme

$$W_A(R) \to W_A(R) \to \cdots \to W_A(R) \to W_A(R) \to \cdots,$$

les applications de transition étant la multiplication par π.

Tout élément de $W_K(R)$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{n \gg -\infty} \pi^n [u_n]$, avec les $u_n \in R$, presque tous nuls pour $n < 0$.

Remarquons enfin que G opère, par fonctorialité, sur R, $W(R)$, $W_A(R)$, $W_K(R)$. Cette action de G est "compatible avec toutes les structures", en particulier, elle est continue.

2.4. PROPOSITION. *Soit θ_0: $W_K(R) \to C$ l'application définie par*

$$\theta_0\Bigl(\sum_{n \gg -\infty} \pi^n[u_n]\Bigr) = \sum_{n \gg -\infty} \pi^n u_n^{(0)}.$$

i) *L'application θ_0 ne dépend pas du choix de π et est un homomorphisme continu et surjectif de K-algèbres, qui commute à l'action de G; l'image de $W_A(R)$ est A_C.*

ii) *Le noyau $W_K^1(R)$ de θ_0 (resp. le noyau $W_A^1(R)$ de la restriction de θ_0 à $W_A(R)$) est un idéal principal de $W_K(R)$ (resp. $W_A(R)$) et tout générateur de $W_A^1(R)$ est un générateur de $W_K^1(R)$. Pour qu'un élément $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n[u_n]$ de $W_A^1(R)$ engendre $W_A^1(R)$, il faut et il suffit que u_1 soit une unité de R et on a alors $v_R(u_0) = 1$.*

Démonstration. Le fait que la restriction θ_0' de θ_0 à $W(R)$ est un homomorphisme de $W(k)$-algèbres est un exercice facile sur la définition des vecteurs de Witt (ou, si l'on préfère, résulte immédiatement de la propriété universelle des vecteurs de Witt). Il est clair que θ_0 n'est autre que l'application K-linéaire déduite de θ_0' par extension des scalaires; l'indépendance par rapport à π et le fait que θ_0 est un homomorphisme de K-algèbres s'en déduisent. Les autres assertions du (i) sont évidentes.

Soit u un élément de R tel que $u^{(0)} = -\pi$. Il est clair que $[u] + \pi \in W_A^1(R)$, ce qui montre l'existence d'un élément $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n[u_n]$ de $W_A^1(R)$ tel que u_1 est une unité de R.

Si $\sum \pi^n[u_n] \in W_A^1(R)$ et si u_1 est une unité de R, on a $v(\sum_{n=2}^{\infty} \pi^n u_n^{(0)}) \geq 2$ et $v(\pi u_1^{(0)}) = 1$; on doit donc avoir $v_R(u_0) = v(u_0^{(0)}) = 1$.

Soit maintenant $\sum \pi^n[u_n]$ un élément de $W_A^1(R)$ tel que u_1 n'est pas une unité de R. Quelque soit $\sum \pi^n[x_n] \in W_A(R)$, si on pose $\sum \pi^n[u_n'] = (\sum \pi^n[u_n]) \cdot (\sum \pi^n[x_n])$, on a $u_1' = u_0 x_1 + u_1 x_0$, qui n'est pas une unité de R, puisque ni u_1 ni u_0 n'en est une. On en déduit que $\sum \pi^n[u_n]$ n'engendre pas $W_A^1(R)$.

Soit enfin $\alpha = \sum \pi^n[u_n]$ un élément de $W_A^1(R)$ tel que u_1 est une unité. Pour montrer que α engendre $W_A^1(R)$, il suffit de vérifier que, pour tout $\beta \in W_A^1(R)$, il existe des $x_n \in R$ et des $\beta_m \in W_A(R)$ tels que, pour tout entier $m \geq 0$, on ait

$$\beta = \alpha\left(\sum_{n=0}^{m-1} \pi^n[x_n]\right) + \pi^m \beta_m.$$

Cela se fait par récurrence sur m. C'est clair, si $m = 0$. Si $m > 0$, on a $0 = \theta_0(\beta) = \theta_0(\pi^{m-1}\beta_{m-1}) = \pi^{m-1}\theta_0(\beta_{m-1})$ et $\beta_{m-1} \in W_A^1(R)$; si $\beta_{m-1} = \sum \pi^n[v_n]$, on a $v(\sum_{n \geq 1} \pi^n v_n^{(0)}) \geq 1$, donc $v_R(v_0) = v(v_0^{(0)}) \geq 1 = v_R(u_0)$; si on pose $x_{m-1} = v_0/u_0$, on voit que $\beta - \alpha(\sum_{n=0}^{m-1} \pi^n[x_n]) \in \pi^m W_A(R)$.

Enfin, les assertions concernant $W_K^1(R)$ sont maintenant triviales.

2.5. PROPOSITION. *Pour tout entier $i \geq 0$, posons $W_K^i(R) = (W_K^1(R))^i$. Alors les $W_K^i(R)$ sont des idéaux fermés de $W_K(R)$ et $\cap W_K^i(R) = 0$.*

Commençons par établir un lemme:

2.6. LEMME. *Soit α un générateur de $W_A^1(R)$. Si $(\beta_r)_{r\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $W_K(R)$ telle que la suite des $\alpha\beta_r$ tend vers 0, alors la suite des β_r tend aussi vers 0.*

Démonstration du lemme. Quitte à multiplier α par une unité, on peut supposer que $\alpha = [u] + \pi$, avec u élément de R vérifiant $u^{(0)} = -\pi$, donc $v_R(u) = v(\pi)$.

Si la suite des $\alpha\beta_r$ tend vers 0, pour r assez grand, $\alpha\beta_r \in W_A(R)$, donc aussi β_r, et on peut supposer que les β_r sont tous dans $W_A(R)$.

Pour tout nombre réel $a \geq 0$, soit $W_{A,a}(R)$ l'ensemble des $\sum\pi^n[u_n] \in W_A(R)$ qui vérifient $v_R(u_n) \geq (a-n)$, pour $n < a$. Les $W_{A,a}(R)$ sont des idéaux de $W_A(R)$ qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0. Pour achever la démonstration du lemme, il suffit donc de vérifier que, si β est un élément de $W_A(R)$ tel que $\alpha\beta \in W_{A,a+1}(R)$, alors $\beta \in W_{A,a}(R)$.

Pour cela, posons $\beta = \sum\pi^n[u_n]$ et

$$\alpha\beta = \sum\pi^n[v_n] = \sum\pi^n[u\cdot u_n] + \sum\pi^{n+1}[u_n].$$

On a $v_R(v_n) \geq (a+1-n)$ et on va montrer, par récurrence sur m, que $v_R(u_m) \geq (a-m)$, pour tout $m \geq 0$:

—on a $v_0 = u\cdot u_0$, donc $v_R(u_0) = v_R(v_0) - 1 \geq a$;

—si $v_R(u_n) \geq (a-n)$, pour $n < m$, on voit que $\sum_{n=0}^{m-1}\pi^n[u\cdot u_n] + \sum_{n=1}^{m}\pi^n[u_{n-1}] \in W_{A,a+1}(R)$ et on doit donc avoir

$$\sum_{n=m}^{\infty}\pi^n[u\cdot u_n] + \sum_{n=m+1}^{\infty}\pi^n[u_{n-1}] = \pi^m[u\cdot u_m] + \pi^{m+1}(\cdots) + \cdots \in W_{A,a+1}(R),$$

d'où $v_R(u\cdot u_m) = v(\pi) + v_R(u_m) \geq (a+1-m)$, ou encore $v_R(u_m) \geq (a-m)$.

2.7. *Démontrons maintenant la proposition* 2.5: L'idéal $W_K^1(R)$ est fermé, puisque c'est le noyau de l'application continue θ_0 et le lemme montre que la multiplication par α est un homéomorphisme de $W_K(R)$ sur $W_K^1(R)$. Le fait que tous les $W_K^i(R)$ sont fermés s'en déduit alors, par récurrence sur i.

Soit α un générateur de $W_A^1(R)$ et soit β un élément non nul de $\cap W_K^i(R)$. Quitte à multiplier β par une puissance de π convenable, on peut supposer que

$\beta \in W_A(R)$ et $\beta \notin \pi W_A(R)$, donc que β est de la forme $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n [u_n]$, avec $u_0 \neq 0$.

Pour tout entier i, il existe $\gamma_i \in W_K(R)$ tel que $\alpha^i \gamma_i = \beta$; comme $\beta \in W_A(R)$, cela entraîne que $\gamma_i \in W_A(R)$. Comme $\alpha^i = [u^i] + \pi(\cdots) + \cdots$, avec $v_R(u) = 1$, on a $v_R(u_0) \geq i$, d'où $u_0 = 0$, contrairement à l'hypothèse.

2.8. On pose $B_{\mathrm{DR}/K}^+ = \varprojlim W_K(R)/W_K^i(R)$. On a en fait une K-algèbre topologique en la munissant de la topologie de la limite projective, avec la topologie quotient sur chaque $W_K(R)/W_K^i(R)$ (nous appellerons cette topologie la topologie canonique de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$). Il est clair que $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ est aussi munie d'une action continue de G, compatible avec la structure de K-algèbre. D'après la proposition 2.5, $W_K(R)$ s'identifie à une sous-K-algèbre dense (pour la topologie canonique) de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ et l'inclusion est continue.

Comme $W_K^1(R)$ est un idéal maximal de $W_K(R)$, engendré par un élément non nilpotent, $B_{\mathrm{DR}/K}^+ = \varprojlim W_K(R)/(W_K^1(R))^i$ est un anneau de valuation discrète, complet (la topologie définie par cette valuation est, bien sûr, plus fine que la topologie canonique) et le prolongement de θ_0 à $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ (que l'on notera encore θ_0) identifie le corps résiduel de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ à C.

Nous notons $B_{\mathrm{DR}/K}$ le corps des fractions de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ et, si d est la valuation de $B_{\mathrm{DR}/K}$ normalisée par $d(B_{\mathrm{DR}/K}^*) = \mathbf{Z}$, on fait de $B_{\mathrm{DR}/K}$ un anneau filtré en posant $B_{\mathrm{DR}/K}^i = \{b \in B_{\mathrm{DR}/K} \mid d(b) \geq i\}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$. On a donc $B_{\mathrm{DR}/K}^+ = B_{\mathrm{DR}/K}^0$ et, pour tout $i \geq 0$, $B_{\mathrm{DR}/K}^i$ est l'adhérence dans $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ de $W_K^i(R)$.

2.9. Nous nous proposons de montrer que $B_{\mathrm{DR}/K}$ ne dépend pas vraiment de K.

Soit K' un corps local contenant K et contenu dans C (autrement dit le complété d'une extension finie, contenue dans $\overline{K}$, d'une extension algébrique non ramifiée de K). La fermeture algébrique $\overline{K'}$ de K' dans C est une clôture algébrique de K' dont la complétion s'identifie à C. En particulier, l'anneau $R = A_{R(C)}$ construit au no. 2.1 est le même pour K et K'.

Soit k' le corps résiduel de K' et soit K_0' le corps des fractions de $W(k')$. On voit que $W_{K'}(R) = K' \otimes_{W(k')} W(R)$ s'identifie à $K' \otimes_{KK_0'} W_K(R)$. L'application $\alpha \mapsto 1 \otimes_{KK_0'} \alpha$ définit un homomorphisme injectif de $W_K(R)$ dans $W_{K'}(R)$ et nous l'utilisons pour identifier $W_K(R)$ à une sous-K-algèbre de $W_{K'}(R)$. Il est clair que $W_K^1(R) = W_{K'}^1(R) \cap W_K(R)$. Par passage à la limite, l'inclusion de $W_K(R)$ dans $W_{K'}(R)$ induit donc un homomorphisme injectif de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$ dans $B_{\mathrm{DR}/K'}^+$, visiblement continu (aussi bien pour les topologies canoniques que pour les topologies d'anneaux de valuation discrète), donc un plongement continu de $B_{\mathrm{DR}/K}$ dans $B_{\mathrm{DR}/K'}$.

2.10. Proposition. *Le plongement de $B_{\mathrm{DR}/K}$ dans $B_{\mathrm{DR}/K'}$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. Les corps $B_{\mathrm{DR}/K}$ et $B_{\mathrm{DR}/K'}$ sont tous les deux des corps complets à valuation discrète. Comme le plongement de $B_{\mathrm{DR}/K}$ dans $B_{\mathrm{DR}/K'}$ est continu, et comme ces deux corps ont le même corps résiduel, l'extension $B_{\mathrm{DR}/K'}/B_{\mathrm{DR}/K}$ est finie, totalement ramifiée. Si α est une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K}$, il suffit de montrer que α est encore une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K'}$. On peut dévisser la démonstration en deux parties:

—le cas où K' est le complété d'une extension algébrique non ramifiée de K,

—le cas où K' est une extension finie totalement ramifiée de K.

Dans le premier cas, choisissons un élément u de R tel que $u^{(0)} = -\pi$. Alors $\alpha = [u] + \pi$ est un générateur de $W_K^1(R)$, donc a fortiori une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K}$. Comme π est aussi une uniformisante de K', α est encore un générateur de $W_{K'}^1(R)$, donc une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K'}$.

Dans le second cas, quitte à remplacer K' (resp. K) par une extension finie (resp. finie non ramifiée), on peut supposer K'/K galoisienne. Posons $J = \mathrm{Gal}(K'/K)$ et choisissons une uniformisante π' de K' et un élément $u' \in R$ tel que $u'^{(0)} = -\pi'$. Alors $\alpha' = [u'] + \pi'$ est un générateur de $W_{K'}^1(R)$, donc une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K'}$. Posons $\alpha = \prod_{g\in J}([u'] + g\pi')$. Il est clair que $\alpha \in W_A^1(R)$ et que, si $e = [K' : K]$, $\alpha \equiv [u'^e] (\mathrm{mod}\, \pi W_A(R))$. Comme $v_R(u'^e) = e \cdot v_R(u') = e \cdot v(\pi') = v(\pi)$, on voit que α est un générateur de $W_A^1(R)$, donc une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K}$. Mais on a $\alpha = \alpha'\beta$, avec $\beta = \prod_{g\neq 1}([u'] + g\pi')$ donc $\theta_0(\beta) = \prod_{g\neq 1}(g\pi' - \pi') \neq 0$. Donc β est inversible dans $B_{\mathrm{DR}/K'}$ et α est bien une uniformisante de $B_{\mathrm{DR}/K'}$.

2.11. *Remarques.* a) Dans la suite, on utilise la proposition 2.10 pour identifier $B_{\mathrm{DR}/K}$ et $B_{\mathrm{DR}/K'}$ et on écrit B_{DR} au lieu de $B_{\mathrm{DR}/K}$, B_{DR}^+ au lieu de $B_{\mathrm{DR}/K}^+$, B_{DR}^i au lieu de $B_{\mathrm{DR}/K}^i$.

b) Pour toute extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$, on peut donc considérer B_{DR} comme une K'-algèbre; par passage à la limite, on peut donc considérer B_{DR} comme une $\bar{K}$-algèbre. Si on désigne par P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\bar{K}$ et par $\bar{P}$ la fermeture algébrique de P dans C, B_{DR} est même une $\bar{P}$-algèbre. L'action de G est alors semi-linéaire, i.e. on a $g(x\alpha) = gx \cdot g\alpha$, si $g \in G$, $x \in \bar{P}$, $\alpha \in B_{\mathrm{DR}}$.

2.12. Proposition. *Soit $W_A^+(R)$ le sous-groupe (fermé) du groupe multiplicatif de $W_A(R)$ formé des éléments $\sum_{n=0}^{\infty}\pi^n[u_n]$ tels que $v_R(u_0 - 1) > 0$.*

i) *Pour tout $\beta \in W_A^+(R)$, la série $\log\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\beta - 1)^n/n$ converge dans B_{DR}^+ (pour la topologie canonique).*

ii) *L'application* log *ainsi définie est un homomorphisme continu du groupe multiplicatif* $W_A^+(R)$ *dans le groupe additif de* B_{DR}^+; *son noyau est le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de* p *contenues dans* K_{nr}, *extension maximale non ramifiée de* K *contenue dans* $\overline{K}$.

Démonstration. Pour tout entier $m \geq 0$, soit $W_{A,m}(R)$ l'ensemble des $\sum_{n=0}^{\infty}\pi^n[u_n] \in W_A(R)$ qui vérifient $v_R(u_n) \geq m - n$, pour tout n. Les $W_{A,m}(R)$ (resp. les $1 + W_{A,m}(R)$) sont des idéaux de $W_A(R)$ (resp. des sous-groupes de $W_A^+(R)$) qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 (resp. de 1) et on a $W_{A,m}(R) = (W_{A,1}(R))^m$. On voit que $W_{A,1}(R) = W_A^1(R) + \pi \cdot W_A(R)$, donc que, pour tout $m \geq 1$,

$$W_{A,m}(R) = W_A^m(R) + \pi \cdot W_A^{m-1}(R) + \cdots + \pi^{m-1} \cdot W_A^1(R) + \pi^m \cdot W_A(R).$$

Il est clair que pour démontrer (i) et prouver que log est un homomorphisme, il suffit de vérifier le lemme suivant:

2.13. Lemme. *Pour tout* $\beta = 1 + \gamma \in W_A^+(R)$, *la suite des* γ^n/n *tend vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$.

Démonstration du lemme. Les $W_{A,m}(R) + W_K^{m+1}(R)$, pour $m \in \mathbf{N}$, sont des sous-$W_A(R)$-modules de $W_K(R)$ qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 pour la topologie de $W_K(R)$ induite par la topologie canonique de B_{DR}^+. Il suffit donc de vérifier que, pour m fixé, $\gamma^n/n \in W_{A,m}(R) + W_K^{m+1}(R)$, pour n assez grand.

Il est clair que l'on peut trouver un entier r tel que $\gamma^r \in W_{A,1}(R)$. Si l'on pose $n = r \cdot a(n) + b(n)$, avec $a(n), b(n) \in \mathbf{N}$ et $0 \leq b(n) < r$, alors, pour $a(n) \geq m$,

$$\begin{aligned}\gamma^{a(n)\cdot r} \in W_{A,a(n)}(R) &= \sum_{j=0}^{a(n)} \pi^{a(n)-j} \cdot W_A^j(R)\\ &= \pi^{a(n)-m} \cdot \sum_{j=0}^{m} \pi^{m-j} \cdot W_A^j(R) + \sum_{j=m+1}^{a(n)} \pi^{a(n)-j} \cdot W_A^j(R).\end{aligned}$$

Pour $0 \leq j \leq m$, $\pi^{m-j} \cdot W_A^j(R) \subset W_{A,m}(R)$, ce qui fait que

$$n^{-1} \cdot \gamma^{a(n)\cdot r} \in n^{-1} \cdot \pi^{a(n)-m} \cdot W_{A,m}(R) + W_K^{m+1}(R);$$

il en est de même de $\gamma^n/n = \gamma^{b(n)} \cdot \gamma^{a(n)\cdot r}/n$. Le lemme résulte alors de ce que, pour n suffisamment grand, $n^{-1} \cdot \pi^{a(n)-m}$ est entier.

2.14. Lemme. *Soit* m *un entier suffisamment grand* (*de façon précise, un entier tel que* $m(n-1) - v(n) \geq 1$, *pour tout entier* $n \geq 2$) *et soit* $\gamma \in W_{A,m}(R)$. *Alors* $\gamma^n/n \in W_{A,m+1}(R) + W_K^{m+1}(R)$, *pour tout entier* $n \geq 2$.

Démonstration. On a

$$\gamma^n \in W_{A,mn}(R) = \pi^{mn} \cdot W_A(R) + \pi^{mn-1} \cdot W_A^1(R) + \cdots + W_A^{mn}(R)$$
$$= \pi^{mn-m-1} \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} \pi^{m+1-j} \cdot W_A^j(R) + \sum_{j=m+1}^{mn} \pi^{mn-j} \cdot W_A^j(R) \right).$$

Comme, pour $0 \leq j \leq m$, $\pi^{m+1-j} \cdot W_A^j(R) \subset W_{A,m+1}(R)$, on voit que $\gamma^n/n \in (n^{-1} \cdot \pi^{mn-m-1}) \cdot W_{A,m+1}(R) + W_K^{m+1}(R)$. On a

$$v(n^{-1} \cdot \pi^{mn-m-1}) = mn - m - 1 - v(n) \geq 0$$

si $m(n-1) - v(n) \geq 1$, d'où le lemme.

2.15. *Achevons maintenant la démonstration de la proposition* 2.12. La continuité résulte immédiatement du lemme 2.14 qui montre que, pour m suffisamment grand, $\log(1 + W_{A,m}(R))$ est contenu dans l'adhérence de $W_{A,m}(R) + W_K^{m+1}(R)$.

Soit $W_A^+(R)_{\text{tor}}$ le sous-groupe de torsion de $W_A^+(R)$. Comme $W_A(R)$ se plonge dans le corps B_{DR} qui est une $\overline{K}$-algèbre, c'est un sous-groupe du groupe des racines de l'unité de B qui sont aussi celles de $\overline{K}$; comme θ_0 envoie $W_A^+(R)$ dans le groupe des unités de A_C qui sont congrues à 1 modulo l'idéal maximal, $(W_A^+(R))_{\text{tor}}$ est un sous-groupe du groupe $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\overline{K})$ des racines de l'unité de $\overline{K}$ d'ordre une puissance de p. Il contient $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(K_{nr})$ puisque $W_A(R)$ est une A_{nr}-algèbre (si A_{nr} est l'anneau des entiers de K_{nr}). S'il existait $\varepsilon \in W_A^+(R)_{\text{tor}}$ avec $\varepsilon \notin \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(K_{nr})$ et si on note K' le complété du corps $K_{nr}(\varepsilon)$, l'anneau $W_{K'}(R) = K' \otimes_{\hat{K}_{nr}} W_A(R)$ ne serait pas intègre, ce qui contredit le fait qu'il se plonge dans le corps B_{DR}. Finalement, on voit que $W_A^+(R)_{\text{tor}} = \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(K_{nr})$.

Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit donc de vérifier que si $\beta \in W_A^+(R)$ n'est pas un élément de torsion, alors $\log \beta \neq 0$. Soit m un entier vérifiant les conditions du lemme 2.14. Il est clair que l'on peut trouver un entier r tel que $\beta^r \in 1 + W_{A,m}(R)$. Comme $\beta^r \neq 1$, il existe un entier $m' \geq m$ tel que $\beta^r \in 1 + W_{A,m'}(R)$, mais $\beta^r \notin 1 + W_{A,m'+1}(R)$. D'après le lemme 2.14, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}(\beta^r - 1)^n/n$ appartient à l'adhérence de $W_{A,m'+1}(R) + W_K^{m'+1}(R)$. Si on avait $\log \beta = 0$, on aurait $\log \beta^r = r \log \beta = 0$ donc $\beta^r - 1 \in W_{A,m'+1}(R) + W_K^{m'+1}(R)$. Si $\beta^r - 1 = \gamma_1 + \gamma_2$, avec $\gamma_1 \in W_{A,m'+1}(R)$ et $\gamma_2 \in W_K^{m'+1}(R)$, on a $\gamma_2 = \beta^r - 1 - \gamma_1 \in W_A(R)$, donc

$$\gamma_2 \in W_A(R) \cap W_K^{m'+1}(R) = W_A^{m'+1}(R) \subset W_{A,m'+1}(R);$$

on aurait donc $\beta^r - 1 \in W_{A,m'+1}(R)$, contrairement à l'hypothèse.

2.16. *Remarques.* a) Il est clair que l'application log commute à l'action de Galois, i.e., que pour tout $g \in G$, tout $\beta \in W_A^+(R)$, on a $\log(g\beta) = g(\log \beta)$.

b) Si $\beta \in W_A^+(R)$, $\theta_0(\beta)$ appartient au groupe U_C^+ des unités de A_C congrues à 1 modulo l'idéal maximal de A_C et l'on a $\theta_0(\log \beta) = \log(\theta_0(\beta))$.

c) Soit U_R^+ le groupe des unités de l'anneau R congrues à 1 modulo l'idéal maximal de R (c'est en fait un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel qui s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, U_C^+)$, en associant à $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ l'unique application $\mathbf{Z}_p$-linéaire $\hat{u}$: $\mathbf{Q}_p \to U_C^+$ telle que $\hat{u}(p^{-n}) = u^{(n)}$). L'application $u \mapsto \log([u])$ définit un monomorphisme de U_R^+ dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à B_{DR}^+. Nous l'utilisons pour identifier le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel, de dimension 1, $T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, U_C^+)$ à un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de B_{DR}^+.

2.17. Proposition. *Tout élément non nul t de T* (cf. rem. c) *ci-dessus*) *est une uniformisante de B_{DR}^+.*

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de démontrer la proposition pour un choix particulier de t. On choisit t de la forme $t = \log([\varepsilon])$, avec $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ vérifiant $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$.

Tout d'abord, on a

$$\theta_0(t) = \theta_0(\log([\varepsilon])) = \log\big(\theta_0([\varepsilon])\big) = \log \varepsilon^{(0)} = 0$$

et t appartient à l'idéal maximal de B_{DR}^+. Si α est un générateur de $W_A^1(R)$, il existe $\beta \in B_{\mathrm{DR}}^+$ tel que $t = \alpha\beta$ et, pour achever la démonstration de la proposition, il suffit de vérifier que $\theta_0(\beta) \neq 0$.

Il est clair que l'on peut supposer K absolument non ramifié (on a donc $A = W(k)$ et $W_A(R) = W(R)$) et choisir $\pi = p$, $\alpha = [u] + p = (u, 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, avec $u \in R$ tel que $u^{(0)} = -p$.

Posons $[\varepsilon] = 1 + \gamma$ et $\gamma = (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$. On a $1 + c_0 = \varepsilon$, donc $c_0 = \varepsilon - 1$ et $c_0^{(0)} = \lim_{n\to\infty}(\varepsilon^{(n)} - 1)^{p^n}$ (si $x, y \in R$, on a $(x-y)^{(0)} = \lim_{n\to\infty}(x^{(n)} - y^{(n)})^{p^n}$; c'est clair si $p \neq 2$, et, si $p = 2$, on a

$$\begin{aligned}(x-y)^{(0)} = (x+y)^{(0)} &= \lim_{n\to\infty}\big(x^{(n)} + y^{(n)}\big)^{2^n}\\ &= \lim\big(x^{(n)} - y^{(n)} + 2y^{(n)}\big)^{2^n} = \lim\big(x^{(n)} - y^{(n)}\big)^{2^n}\Big).\end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$, $v(\varepsilon^{(n)} - 1) = 1/p^{n-1}(p-1)$ et $v_R(c_0) = v(c_0^{(0)}) = p/(p-1)$.

Supposons d'abord $p \neq 2$. Comme $p/(p-1) \geq 1$, $\gamma \in W_{A,1}(R)$. Comme $n - 1 - v(n) \geq 1$, pour tout entier $n \geq 2$, le lemme 2.14 s'applique et on peut trouver $\lambda \in W_{A,2}(R)$ et $\mu \in B_{\mathrm{DR}}^+$ tels que

$$t = \log(1+\gamma) = \gamma + \lambda + \alpha^2\mu.$$

On a alors $t = [c_0/u]\cdot\alpha + (\gamma - [c_0/u]\cdot\alpha) + \lambda + \alpha^2\mu$. Comme $\lambda \in W_{A,2}(R)$, $\theta_0(\lambda) \in p^2A_C$ et

$$0 = \theta_0(t) \equiv \theta_0\big(\gamma - [c_0/u]\cdot\alpha\big) \qquad \big(\mathrm{mod}\, p^2A_C\big).$$

Mais $\gamma - [c_0/u]\cdot\alpha$ est de la forme $\Sigma_{n=1}^{\infty}p^n[y_n]$, avec les $y_n \in R$, et $\theta_0(\gamma - [c_0/u]\cdot\alpha) \equiv py_1^{(0)} \pmod{p^2A_C}$; on a donc $v_R(y_1) = v(y_1^{(0)}) \geq 1$, et $\gamma - [c_0/u]\cdot\alpha \in W_{A,2}(R)$. Aussi peut-on écrire

$$\alpha\beta = t = [c_0/u]\cdot\alpha + \lambda' + \alpha^2\mu, \quad \text{avec } \lambda' \in W_{A,2}(R).$$

On a $\theta_0(\lambda') = 0$ et $\lambda' \in W_{A,2}(R) \cap W_A^1(R)$; on vérifie que cela implique que $\lambda' = \alpha\mu'$, avec $\mu' \in W_{A,1}(R)$, d'où

$$\alpha\beta = [c_0/u]\cdot\alpha + \alpha\mu' + \alpha^2\mu,$$

ou $\beta = [c_0/u] + \mu' + \alpha\mu$ et $\theta_0(\beta) = (c_0^{(0)}/u^{(0)}) + \theta_0(\mu')$. Comme $\mu' \in W_{A,1}(R)$, $\theta_0(\mu') \in pA_C$; comme

$$v\big(c_0^{(0)}/u^{(0)}\big) = (p/(p-1)) - 1 = 1/(p-1) < 1,$$

on a $v(\theta_0(\beta)) = 1/(p-1)$ et $\theta_0(\beta) \neq 0$.

Supposons maintenant $p = 2$. La démonstration est analogue, sauf que l'on a besoin d'un calcul plus précis: on commence par calculer les deux premiers coefficients de $\gamma = [\varepsilon] - 1 = (\varepsilon,0,0,\ldots,0,\ldots) - (1,0,0,\ldots,0,\ldots)$; on trouve $c_0 = c_1 = \varepsilon - 1$, d'où $\gamma = [\varepsilon - 1] + 2[(\varepsilon-1)^{1/2}] + \cdots \in W_{A,2}(R)$, car $v_R(\varepsilon - 1) \geq 2$ et $v_R((\varepsilon-1)^{1/2}) \geq 1$.

Comme $2(n-1) - v(n) \geq 1$, pour tout entier $n \geq 2$, le lemme 2.14 montre que l'on peut trouver $\lambda \in W_{A,3}(R)$ et $\mu \in B_{\mathrm{DR}}^+$ tel que

$$t = \log(1+\gamma) = \gamma + \lambda + \alpha^3\mu.$$

Posons $x_0 = (\varepsilon - 1)/u$ et $x_1 = (\varepsilon - 1 - x_0^2)/u^2$; on a $v_R(x_0) = 2 - 1 = 1$ et $v_R(\varepsilon - 1 - x_0^2) \geq 2 = v_R(u^2)$, donc $x_0, x_1 \in R$. Si l'on pose $\xi = (x_0, x_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, on vérifie que $\gamma - \xi\alpha$ est de la forme $\Sigma_{n=2}^{\infty}2^n[y_n]$, avec les $y_n \in R$. On a

$$0 = \theta_0(t) = \theta_0(\gamma) + \theta_0(\lambda) = \theta_0(\gamma - \xi\alpha) + \theta_0(\lambda).$$

Comme $\lambda \in W_{A,3}(R)$, $\theta_0(\lambda) \in 8A_C$, donc $\theta_0(\gamma - \xi\alpha)$ aussi et cela implique que $v_R(y_2) = v(y_2^{(0)}) \geq 1$, donc que $\gamma - \xi\alpha \in W_{A,3}(R)$. On peut donc écrire

$$\alpha\beta = t = \xi\alpha + \lambda' + \alpha^3\mu, \quad \text{avec } \lambda' \in W_{A,3}(R).$$

On a donc $\lambda' \in W_{A,3}(R) \cap W_A^1(R)$ et on vérifie que cela implique que $\lambda' = \alpha\mu'$, avec $\mu' \in W_{A,2}(R)$, d'où

$$\beta = \xi + \mu' + \alpha^2\mu,$$

et $\theta_0(\beta) = \theta_0(\xi) + \theta_0(\mu') \equiv \theta_0(\xi) \pmod{4A_C}$. On a $\theta_0(\xi) = x_0^{(0)} + 2x_1^{(1)}$; or $v(x_0^{(0)}) = 1$, tandis qu'un petit calcul montre que $v_R(x_1) > 0$, donc que $v(2x_1^{(1)}) > 1$. On a donc $v(\theta_0(\beta)) = 1$ et $\theta_0(\beta) \neq 0$.

2.18. THÉORÈME. *L'algèbre graduée associée à B_{DR} (munie de la filtration par les B_{DR}^i) s'identifie canoniquement à B_{HT} (en tant que $\bar{K}$-algèbre, munie de l'action de G).*

Démonstration. Choisissons un élément non nul $t \in T$. Pour tout entier i, on a $B_{\mathrm{DR}}^i = t^i B_{\mathrm{DR}}^+$ et $gr^i B_{\mathrm{HT}} = CT^i = \{ct^i \mid c \in C\}$. Soit θ_i: $B_{\mathrm{DR}}^i \to gr^i B_{\mathrm{HT}}$, l'application définie par $\theta_i(t^i\beta) = t^i \cdot \theta_0(\beta)$, pour tout $\beta \in B_{\mathrm{DR}}^+$. Il est clair que θ_i ne dépend pas du choix de t et que c'est une application $\bar{K}$-linéaire surjective qui commute à l'action de G, dont le noyau est B_{DR}^{i+1}. Enfin, si i et j sont deux entiers et si $\gamma \in B_{\mathrm{DR}}^i$, $\gamma' \in B_{\mathrm{DR}}^j$, on a $\theta_{i+j}(\gamma\gamma') = \theta_i(\gamma) \cdot \theta_j(\gamma')$, d'où le théorème.

2.19. *Remarque.* Soit s: $C \to B_{\mathrm{DR}}^+$ un $\bar{K}$-plongement de C dans B_{DR}^+ tel que $\theta_0 \circ s = \mathrm{id}_C$ (un tel plongement existe; cf. par exemple, [Se1], chap. II, §4) et soit $\hat{C} = s(C)$. Si l'on choisit un élément non nul $t \in T$, B_{DR}^+ (resp. B_{DR}) s'identifie à l'anneau (resp. au corps) des séries formelles $\hat{C}[[t]]$ (resp. $\hat{C}((t))$) à coefficients dans $\hat{C}$; l'application qui à $\sum_{n \gg -\infty} c_n t^n$ (avec les $c_n \in \hat{C}$) associe $\sum \theta_0(c_n) t^n$ définit un isomorphisme de la $\bar{K}$-algèbre B_{DR} sur $C((t))$. *Cet isomorphisme ne commute pas en général à l'action de G*; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\hat{C}$ soit stable par G; j'ignore si un tel choix de $\hat{C}$ est possible (mais il me paraît tout à fait invraisemblable qu'il existe un choix canonique de $\hat{C}$).

3. Représentations de de Rham

3.1. Notons $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ la catégorie des K-espaces vectoriels filtrés, à filtration indexée par $\mathbf{Z}$, décroissante, exhaustive et séparée:

—un objet D de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ est donc un K-espace vectoriel, muni d'une famille $(D^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de sous-K-espaces vectoriels, vérifiant $D^{i+1} \subset D^i$, pour tout i, et $\cup D^i = D$, $\cap D^i = 0$.

—un morphisme φ: $D \to D'$ est une application K-linéaire des K-espaces vectoriels sous-jacents telle que $\varphi(D^i) \subset D'^i$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

On désigne par $\underline{\mathrm{Fil}}_K^\varphi$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ formée des objets dont le K-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie.

Les catégories $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ et $\underline{\mathrm{Fil}}_K^\varphi$ sont additives, et même K-linéaires, admettent des limites inductives et projectives finies, mais ne sont pas abéliennes.

On dit qu'un diagramme de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ de la forme

$$0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$$

est *une suite exacte courte* si la suite des K-espaces vectoriels sous-jacents est exacte et si, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, la suite

$$0 \to D_1^i \to D_2^i \to D_3^i \to 0$$

est exacte.

Un foncteur additif de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ dans une catégorie abélienne, ou d'une catégorie abélienne dans $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, est dit *exact* s'il transforme suite exacte courte en suite exacte courte.

3.2. Si D_1 et D_2 sont deux objets de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, *le produit tensoriel* $D_1 \otimes D_2$ est, par définition, l'objet D de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est $D_1 \otimes_K D_2$, la filtration étant donnée par

$$D^i = \sum_{i'+i''=i} D_1^{i'} \otimes_K D_2^{i''}.$$

On désigne encore par K l'objet de $\underline{\mathrm{Fil}}_K^{\varphi}$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est K-lui-même, la filtration étant donnée par

$$(K)^i = \begin{cases} K & \text{si } i \leq 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Alors K est un *objet-unité* de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, i.e., pour tout objet D de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, on a $K \otimes D \simeq D \otimes K \simeq D$.

Si D est un objet de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, son *dual* D^* est, par définition, l'objet de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ dont le K-espace vectoriel sous-jacent est le dual du K-espace vectoriel sous-jacent à D, la filtration étant définie par

$$(D^*)^i = (D^{1-i})^{\perp}.$$

3.3. On dispose d'un foncteur K-linéaire évident $\underline{\mathrm{gr}}_K \colon \underline{\mathrm{Fil}}_K \to \underline{\mathrm{Grad}}_K$: si D est un objet de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$, $\underline{\mathrm{gr}}_K(D)$ est le K-espace vectoriel gradué

$$\underline{\mathrm{gr}}_K(D) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \underline{\mathrm{gr}}_K^i(D),$$

avec $\underline{\mathrm{gr}}_K^i(D) = D^i/D^{i+1}$. Le foncteur $\underline{\mathrm{gr}}_K$ est exact et on a des identifications naturelles

$$\underline{\mathrm{gr}}_K(D_1 \otimes D_2) = \underline{\mathrm{gr}}_K(D_1) \otimes \underline{\mathrm{gr}}_K(D_2), \qquad \underline{\mathrm{gr}}_K(D^*) = \big(\underline{\mathrm{gr}}_K(D)\big)^*.$$

3.4. *Exemple.* Le corps B_{DR} a une structure naturelle de K-espace vectoriel filtré (muni d'une action de G) et le théorème 2.18 montre que $\underline{\mathrm{gr}}_K(B_{\mathrm{DR}})$ s'identifie à B_{HT}.

3.5. Pour toute représentation p-adique V, posons

$$\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V) = \big(B_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\big)^G \qquad \text{et} \qquad \underline{D}_{\mathrm{DR}}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B_{\mathrm{DR}}).$$

Il est clair que $\underline{D}_{\mathrm{DR}}$ (resp. $\underline{D}_{\mathrm{DR}}^*$) peut être considéré comme un foncteur covariant (resp. contravariant) additif (et même $\mathbf{Q}_p$-linéaire) de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans $\underline{\mathrm{Fil}}_K$ (pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $(\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V))^i = (B^i_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ et $(\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V))^i = \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, \overline{B^i_{\mathrm{DR}}})$).

3.6. Proposition. *Pour toute représentation p-adique V, $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$ et $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V)$ sont des objets de $\underline{\mathrm{Fil}}^{\varphi}_K$ et la dimension de chacun des deux K-espaces vectoriels sous-jacents est inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. L'identification $\underline{\mathrm{gr}}_K(B_{\mathrm{DR}}) = B_{\mathrm{HT}}$ induit une injection de $\underline{\mathrm{gr}}_K(\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V))$ dans $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ (resp. de $\underline{\mathrm{gr}}_K(\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V))$ dans $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V)$ et la proposition résulte de l'assertion (i) de la proposition 1.6.

3.7. *Définition.* On dit qu'une représentation p-adique V *est de de Rham* si $\dim_K \underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations de de Rham. On voit que c'est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$ et que, si V est de de Rham, $\underline{\mathrm{gr}}_K(\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V))$ s'identifie à $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V)$. On verra, un peu plus bas (cf. assertion (i) du th. 3.10), que, si V est de de Rham, $\dim_K \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$; par conséquent, $\underline{\mathrm{gr}}_K(\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V))$ s'identifie alors à $\underline{D}_{\mathrm{HT}}(V)$.

3.8. Soit I le sous-groupe d'inertie de G et soit G' un sous-groupe fermé de G tel que $G' \cap I$ est ouvert dans I. Le corps $K' = C^{G'}$ est alors un corps local contenant K et contenu dans C, la fermeture algébrique $\overline{K'}$ de K' dans C est une clôture algébrique de K', dense dans C.

Tout $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel, muni d'une action de G, est aussi muni, par restriction, d'une action de G', et on définit ainsi un foncteur $\mathbf{Q}_p$-linéaire, exact et fidèle, $\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}$: $\underline{\mathrm{Rep}}(G) \to \underline{\mathrm{Rep}}(G')$.

Proposition. *Soit V un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. Pour que V soit de Hodge-Tate (resp. de de Rham), il faut et il suffit que $\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V)$ le soit.*

La démonstration est la même dans les deux cas (et est bien connue dans le cas des représentations de Hodge-Tate, cf. [Se3], chap. III, §A.1). Elle repose sur le fait que B_{HT} (resp. B_{DR}) est le même pour K et K' et est une K'-algèbre. On en déduit (*loc. cit.*) que, pour toute représentation p-adique V, $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V))$ (resp. $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V))$) s'identifie à $K' \otimes_K \underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V)$ (resp. $K' \otimes_K \underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V)$).

3.9. Proposition. *Si V est une représentation de Hodge-Tate telle qu'il existe un entier i vérifiant $\underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V) = gr^i \underline{D}^*_{\mathrm{HT}}(V)$ (en particulier, si V est une représentation de Hodge-Tate telle que* $\dim_{\mathbf{Q}_p} V = 1$), *alors V est de de Rham.*

Démonstration. Pour tout entier j, notons T^j le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 de B_{DR} formé des λt^j, avec $\lambda \in \mathbf{Q}_p$, $t \in T$, $t \neq 0$. Il est clair que V

est de de Rham si et seulement si $V \otimes_{\mathbf{Q}_p} T^{-i}$ l'est. Quitte à remplacer V par $V \otimes_{\mathbf{Q}_p} T^{-i}$, on peut donc supposer $i = 0$. L'hypothèse revient alors à affirmer que $\dim_K (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$. On sait (cf. [Sen], p. 167, cor. 1) que cela revient à affirmer que, si G' est le noyau de la représentation, alors $G' \cap I$ est ouvert dans I. La proposition résulte alors de la proposition 3.8.

3.10. Le théorème suivant est alors une conséquence facile (même principe de démonstration que celles des prop. 3.4.1 et 3.4.3 de [Fo2]) des propositions 1.6 et 3.9 et du théorème 2.18:

THÉORÈME. i) *La catégorie* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ *est une sous-catégorie pleine de* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$, *stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual.*

ii) *Une représentation p-adique V est de de Rham si et seulement si* $\dim_K \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

iii) *La restriction à* $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ *de* $\underline{D}_{\mathrm{DR}}$, *aussi bien que de* $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}$, *est un foncteur exact et fidèle.*

iv) *Si V_1 et V_2 sont deux représentations de de Rham,* $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V_1 \otimes V_2)$ (*resp.* $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V_1 \otimes V_2)$) *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, à* $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V_1) \otimes \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V_2)$ (*resp.* $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V_1) \otimes \underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V_2)$).

v) *Si V est une représentation de de Rham, on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels* $\underline{D}^*_{\mathrm{DR}}(V) \simeq \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V^*) \simeq (\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V))^*$.

3.11. *Remarques.* a) L'assertion (i) du théorème signifie que $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{HT}}(G)$. Le groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}}$, défini sur $\mathbf{Q}_p$, "enveloppe pro-algébrique de l'image de Galois" dans les représentations de de Rham, est un quotient de $\mathbf{H}^{\mathrm{HT}}$ (cf. rem. (a) du no. 1.7). Que peut-on en dire?

b) En particulier, a-t'on $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}} \neq \mathbf{H}^{\mathrm{HT}}$, i.e. existe-t'il des représentations qui sont de Hodge-Tate sans être de de Rham? S'il existe un corps de représentants $\hat{C}$ de C dans B^+_{DR}, stable par G (cf. rem. 2.19), la réponse est non. Il n'est pas non plus impossible, a priori, qu'un tel $\hat{C}$ n'existe pas et que la réponse soit quand même non.

c) Le théorème implique que le foncteur $\underline{\omega}_{\mathrm{DR}}$, qui à V associe le K-espace vectoriel sous-jacent à $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$, est un foncteur fibre. Le groupe $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}}_{??}$ des $\otimes$-automorphismes de $\underline{\omega}_{\mathrm{DR}}$ est un groupe pro-algébrique défini sur K, qui est une K-forme intérieure de $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}} \times_{\mathbf{Q}_p} K$.

d) Soit U une représentation de de Rham et soit $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ la sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ engendrée par U et U^* (i.e. la plus petite sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ qui contient U et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual). C'est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ et on dispose de trois foncteurs fibres sur $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$:

—le premier, $\underline{\omega}_U$ associe à V le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent; le groupe $\mathbf{H}_U$ des automorphismes de $\underline{\omega}_U$ est l'enveloppe algébrique de l'image de Galois dans la représentation U; c'est un groupe algébrique défini sur $\mathbf{Q}_p$, quotient de $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}}$.

—le second, $\underline{\omega}_{U,\mathrm{HT}}$ (resp. le troisième $\underline{\omega}_{U,\mathrm{DR}}$) est la restriction à $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ de $\underline{\omega}_{\mathrm{HT}}$, cf. rem. (b) du no. 1.7 (resp. $\underline{\omega}_{\mathrm{DR}}$); le groupe $\mathbf{H}_{U,\mathrm{HT}}$ (resp. $\mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$) des $\otimes$-automorphismes de $\underline{\omega}_{U,\mathrm{HT}}$ (resp. $\underline{\omega}_{U,\mathrm{DR}}$) est un groupe algébrique défini sur K, quotient de $\mathbf{H}_?^{\mathrm{HT}}$ (resp. $\mathbf{H}_{??}^{\mathrm{DR}}$) et est une K-forme intérieure de $\mathbf{H}_U \times_{\mathbf{Q}_p} K$. D'après un résultat de Deligne ([Sa], chap. IV, th. 2.4), la filtration de $\underline{\omega}_{\mathrm{DR},U}$ est scindable et il en résulte que les groupes $\mathbf{H}_{U,\mathrm{HT}}$ et $\mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$ sont K-isomorphes (mais, pas canoniquement).

4. L'anneau B

A) *Construction des anneaux* $B_{\mathfrak{a}}^{+}$.

4.1. On désigne par K_0 le corps des fractions de $W(k)$ et par e le degré de l'extension K/K_0. Rappelons que A désigne l'anneau des entiers de K et que π est une uniformisante de A. Tout élément de $W_{K_0}(R)$ (resp. $W_K(R)$) s'écrit donc, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{n\gg-\infty}p^n[v_n]$ (resp. $\sum_{n\gg-\infty}\pi^n[v_n]$), avec les $v_n \in R$, presque tous nuls, pour $n<0$ (cf. no. 2.3).

4.2. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R, on note $S_{\mathfrak{a}}$ (resp. $S_{A,\mathfrak{a}}$) le sous-ensemble de $W_{K_0}(R)$ (resp. de $W_K(R)$) formé des éléments de la forme $\sum_{n\gg-\infty}p^n[v_n]$ (resp. $\sum_{n\gg-\infty}\pi^n[v_n]$) qui vérifient $v_n \in \mathfrak{a}^{-n}$ pour tout $n<0$. C'est une sous-$W(k)$-algèbre de $W_{K_0}(R)$ (resp. une sous-A-algèbre de $W_K(R)$ qui ne dépend pas du choix de π), stable par G. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux idéaux de R vérifiant $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$, on a

$$W(R) = S_{(0)} \subset S_{\mathfrak{a}} \subset S_{\mathfrak{a}'} \subset S_R = W_{K_0}(R) \text{ et}$$

$$W_A(R) = S_{A,(0)} \subset S_{A,\mathfrak{a}} \subset S_{A,\mathfrak{a}'} \subset S_{A,R} = W_K(R).$$

Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal, et si $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}p^n[v_n]$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty}\pi^n[v_n]$) est un élément de $W(R)$ (resp. $W_A(R)$) tel que $\mathfrak{a} = v_0 \cdot R$, on a $S_{\mathfrak{a}} = W(R)[p^{-1}\alpha]$ (resp. $S_{A,\mathfrak{a}} = W(R)[\pi^{-1}\alpha]$).

Enfin, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de R et si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{1/e}$, on voit que $pS_{A,\mathfrak{b}} \subset A \otimes_{W(k)} S_{\mathfrak{a}} \subset S_{A,\mathfrak{b}}$.

4.3. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de R, on note $\hat{S}_{\mathfrak{a}} = \varprojlim S_{\mathfrak{a}}/p^n S_{\mathfrak{a}}$ (resp. $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}} = \varprojlim S_{A,\mathfrak{a}}/p^n S_{A,\mathfrak{a}} = \varprojlim S_{A,\mathfrak{a}}/\pi^n S_{A,\mathfrak{a}}$) le séparé complété de $S_{\mathfrak{a}}$ (resp. $S_{A,\mathfrak{a}}$) pour la topologie p-adique. C'est une $W(k)$-algèbre (resp. une A-algèbre) topologique sur laquelle G opère continûment. Si $\mathfrak{a} \neq R$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} p^n S_{\mathfrak{a}} = 0$ (resp. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \pi^n S_{A,\mathfrak{a}} = 0$) et $S_{\mathfrak{a}}$ (resp. $S_{A,\mathfrak{a}}$) s'identifie à un sous-anneau dense de $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ (resp. $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$).

On note $B_{\mathfrak{a}}^{+}$ (resp. $B_{\mathfrak{a},K}^{+}$) la K_0-algèbre $K_0 \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{a}}$ (resp. la K-algèbre $K \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{a}} = K \otimes_{K_0} B_{\mathfrak{a}}^{+}$) que l'on munit de la topologie du produit tensoriel. Si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{1/e}$, il résulte de la double inclusion $pS_{A,\mathfrak{b}} \subset A \otimes_{W(k)} S_{\mathfrak{a}} \subset S_{A,\mathfrak{b}}$ que la K-algèbre topologique $B_{\mathfrak{a},K}^{+}$ s'identifie à $K \otimes_A \hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$.

4.4 Proposition. *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ deux idéaux de R vérifiant $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \neq R$. L'inclusion de $S_{\mathfrak{a}}$ dans $S_{\mathfrak{a}'}$ (resp. de $S_{A,\mathfrak{a}}$ dans $S_{A,\mathfrak{a}'}$) induit, par passage aux complétés, un monomorphisme continu de $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ dans $\hat{S}_{\mathfrak{a}'}$ (resp. de $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$ dans $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}'}$), puis, par extension des scalaires, des monomorphismes continus de $B_{\mathfrak{a}}^{+}$ dans $B_{\mathfrak{a}'}^{+}$ et de $B_{\mathfrak{a},K}^{+}$ dans $B_{\mathfrak{a}',K}^{+}$.*

Commençons par énoncer un lemme, dont la vérification est immédiate:

4.5 Lemme. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal propre de R qui est principal, et soit x un générateur de $\mathfrak{a}$. Pour tout $u \in R$, notons $\tilde{u}$ son image dans $R/\mathfrak{a}$. L'application qui, à $\sum_{n \gg -\infty} \pi^n [v_n] \in S_{A,\mathfrak{a}}$ associe $\sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{v_{-n} x^{-n}}) \cdot \xi^n$, est un homomorphisme surjectif de $S_{A,\mathfrak{a}}$ sur l'anneau $(R/\mathfrak{a})[\xi]$ des polynômes à une variable à coefficients dans $R/\mathfrak{a}$, dont le noyau est $\pi S_{A,\mathfrak{a}}$.*

4.6. *Démontrons alors la proposition* 4.4. Il est clair qu'il suffit de vérifier l'assertion concernant la flèche de $S_{A,\mathfrak{a}}$ dans $S_{A,\mathfrak{a}'}$. Le fait qu'elle se prolonge en un homomorphisme continu de $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$ dans $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}'}$ est évident puisque $S_{A,\mathfrak{a}} \subset S_{A,\mathfrak{a}'}$ implique que $\pi^n S_{A,\mathfrak{a}} \subset \pi^n S_{A,\mathfrak{a}'}$, pour tout n.

Le seul problème est donc de montrer que l'application est injective, et l'on voit qu'il suffit de le vérifier dans le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal propre et principal de R et où $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'^2$. Choisissons un générateur x de $\mathfrak{a}$ et posons $v_R(x) = 2\lambda$. Posons $\tilde{S} = S_{A,\mathfrak{a}}/\pi S_{A,\mathfrak{a}} = \hat{S}_{A,\mathfrak{a}}/\pi \hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$ et utilisons le lemme 4.5 pour identifier $\tilde{S}$ à $(R/\mathfrak{a})[\xi]$.

Si l'application n'était pas injective, il existerait $\alpha \in \hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$, non nul, dont l'image dans $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}'}$ serait nulle; comme $\hat{S}_{A,\mathfrak{a}'}$ est sans π-torsion, on peut supposer $\alpha \notin \pi \hat{S}_{A,\mathfrak{a}}$.

Notons $\tilde{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n \xi^n$, avec $\tilde{u}_n \in R/\mathfrak{a}$, l'image de α dans $\tilde{S}$, choisissons une suite $(\alpha_r)_{r \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $S_{A,\mathfrak{a}}$ qui converge vers α et vérifie $\alpha_r \equiv \alpha \pmod{\pi \hat{S}_{A,\mathfrak{a}}}$, pour tout r, et posons $\alpha_r = \sum_{n \gg -\infty} \pi^n [u_{n,r}]$.

Comme $\tilde{\alpha} \neq 0$, il existe un entier s tel que $\tilde{u}_s \neq 0$. On a donc, pour tout r, $(\widetilde{x^{-s}u_{-s,r}}) = \tilde{u}_s \neq 0$, i.e. $v_R(x^{-s}u_{-s,r}) < 2\lambda$ ou $v_R(u_{-s,r}) < 2(s+1)\lambda$.

D'autre part, on vérifie que, pour tout entier $m \geq 0$,

$$\pi^m S_{A,\mathfrak{a}'} \cap S_{A,\mathfrak{a}} = \left\{ \sum \pi^n [v_n] \middle| v_R(v_{-n}) \geq \begin{cases} 2n\lambda & \text{si } n > m, \\ (m+n)\lambda & \text{si } n \leq m \end{cases} \right\}.$$

Si l'image de α était nulle, pour tout r suffisamment grand, on aurait $\alpha_r \in \pi^{s+2} S_{A,\mathfrak{a}'} \cap S_{A,\mathfrak{a}}$ et, par conséquent $v_R(u_{-s,r}) \geq 2(s+1)\lambda$, d'où une contradiction.

4.7. La K-algèbre $W_K(R)$ s'identifie à une sous-K-algèbre dense de B_{DR}^+, aussi bien que de $B_{\mathfrak{a},K}^+$, pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R. On a alors le résultat suivant:

Proposition. *Soit $\mathfrak{a}_0$ l'idéal de R formé des u qui vérifient $v_R(u) \geq v(p)$ et soit $\mathfrak{a}$ un idéal de R contenu dans $\mathfrak{a}_0$. La topologie de $W_K(R)$ induite par la topologie de $B_{\mathfrak{a},K}^+$ est plus fine que la topologie induite par la topologie canonique de B_{DR}^+. L'homomorphisme continu de $B_{\mathfrak{a},K}^+$ dans B_{DR}^+, défini par passage aux complétions, est injectif.*

Démonstration. Compte-tenu de la proposition 4.4, il suffit de prouver la proposition lorsque $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$. Si

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0^{1/e} = \{x \in R \mid v_R(x) \geq e^{-1} \cdot v(p)\} = \{x \in R \mid v_R(x) \geq 1\},$$

on voit qu'il suffit de prouver

i) que l'injection de $S_{A,\mathfrak{b}}$ dans $W_K(R)$ est continue (pour les topologies évidentes),

ii) que l'application de $\hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$ dans B_{DR}^+, déduite par continuité, est injective.

Pour montrer (i), rappelons (cf. no. 2.13) que les $W_{A,m}(R) + W_K^m(R)$, pour $m \in \mathbf{N}$, sont des sous-A-modules de $W_K(R)$ qui forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 (pour la topologie induite par la topologie canonique de B_{DR}^+) et il suffit de vérifier que

$$\pi^m S_{A,\mathfrak{b}} \subset W_{A,m}(R) + W_K^m(R), \quad \text{pour tout } m:$$

Si α est un générateur de $W_A^1(R)$, on a $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n [u_n]$, avec u_0 un générateur de $\mathfrak{b}$, et on en déduit que $S_{A,\mathfrak{b}} = W(R)[\pi^{-1}\alpha]$.

On voit que tout élément $\beta \in S_{A,\mathfrak{b}}$ peut s'écrire $\beta = (\pi^{-1}\alpha)^m \gamma + \beta'$, avec $\gamma, \beta' \in S_{A,\mathfrak{b}}$ et $\beta' = \sum_{n=-m+1}^{+\infty} \pi^n [x_n]$ (avec les $x_n \in R$ vérifiant $v_R(x_n) \geq -n$, si $n < 0$); on a donc $\pi^m \beta = \alpha^m \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \pi^n [x_{n-m}]$; or $\alpha^m \gamma \in W_K^m(R)$ et

$\sum_{n=1}^{\infty}\pi^n[x_{n-m}] \in W_{A,m}(R)$, puisque $v_R(x_{n-m}) \geq m - n$, pour $0 < n \leq m$, et $\pi^m\beta \in W_{A,m}(R) + W_K^m(R)$.

Pour montrer (ii), commençons par énoncer un lemme:

4.8 Lemme. *Pour tout entier* $m \geq 1$, $(W_{A,m}(R) + W_K^m(R)) \cap S_{A,\mathfrak{b}}$ *est contenu dans l'idéal de* $S_{A,\mathfrak{b}}$ *engendré par* π *et* $(\pi^{-1}\alpha)^m$.

Montrons d'abord comment l'injectivité résulte du lemme. Si l'application n'était pas injective, il existerait un élément non nul $\beta \in \hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$ dont l'image dans B_{DR}^+ serait nulle. Comme B_{DR}^+ est sans π-torsion, on peut supposer que $\beta \notin \pi\hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$. Choisissons une suite d'éléments $(\beta_r)_{r\in\mathbf{N}}$ de $S_{A,\mathfrak{b}}$ qui converge vers β et vérifie $\beta_r \equiv \beta \pmod{\pi\hat{S}_{A,\mathfrak{b}}}$, pour tout r. Soit $\tilde{S} = \hat{S}_{A,\mathfrak{b}}/\pi\hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$ et soit ξ l'image de $\pi^{-1}\alpha$ dans $\tilde{S}$. Pour tout entier m, $\beta_r \in W_{A,m}(R) + W_K^m(R)$, si r est assez grand, donc, d'après le lemme 4.8, β_r appartient à l'idéal de $S_{A,\mathfrak{b}}$ engendré par $(\pi^{-1}\alpha)^m$ et π, donc l'image $\tilde{\beta}$ de β dans $\tilde{S}$ appartient à l'idéal de $\tilde{S}$ engendré par ξ^m. Comme l'intersection des $\xi^m\tilde{S}$ est nulle (cf. lemme 4.5), $\tilde{\beta}$ est nul, ce qui contredit l'hypothèse que $\beta \notin \pi\hat{S}_{A,\mathfrak{b}}$.

Montrons maintenant le lemme. Posons $X = (W_{A,m}(R) + W_K^m(R)) \cap S_{A,\mathfrak{b}}$ et notons Y l'idéal $(\pi,(\pi^{-1}\alpha)^m)$; soit $\beta \in X$. On peut écrire $\beta = (\pi^{-1}\alpha)^m\gamma + \beta'$, avec $\gamma, \beta' \in S_{A,\mathfrak{b}}$ et $\beta' = \sum_{n=-m+1}^{+\infty}\pi^n[x_n]$. On a $(\pi^{-1}\alpha)^m \in X$ et $(\pi^{-1}\alpha)^m \in Y$, et on peut donc supposer $\beta = \beta'$.

Mais alors $\beta = \alpha^m\delta + \delta'$, avec $\delta \in W_K(R)$ et $\delta' \in W_{A,m}(R)$. On voit que $\delta' \in X$ et que $\delta' \in \pi S_{A,\mathfrak{b}} \subset Y$ et l'on peut supposer $\delta' = 0$.

On a alors $\beta = \sum_{n=-m+1}^{\infty}\pi^n[x_n] = \alpha^m\delta$, avec $\delta \in W_K(R)$, d'où l'on déduit que δ est de la forme $\delta = \pi^{-m+1}\delta_0$, avec $\delta_0 \in W_A(R)$; on a alors $\beta = \pi^{-m+1}\alpha^m\delta_0 = \pi(\pi^{-m}\alpha^m\delta_0)$ qui est un élément de $S_{A,\mathfrak{b}}$ (puisque $\pi^{-m}\alpha^m\delta_0 \in S_{A,\mathfrak{b}}$), donc de Y.

4.9. Dans toute la suite, nous utilisons la proposition 4.7 pour identifier $B_{\mathfrak{a},K}^+$ à un sous-anneau de B_{DR}^+.

Proposition. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal non nul de* R *contenu dans* $\mathfrak{a}_0$. *Pour tout* $\beta \in W_A^+(R)$, $\log\beta \in B_{\mathfrak{a},K}^+$. *Considérée comme une application du* $\mathbf{Z}_p$*-module topologique* $W_A^+(R)$ *dans le* $\mathbf{Z}_p$*-module topologique sous-jacent à* $B_{\mathfrak{a},K}^+$, *l'application* log *est continue.*

Démonstration. Compte-tenu de la proposition 4.4, il suffit de démontrer l'assertion lorsque $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0^r$, avec r entier ≥ 1.

Si alors $x = \sum_{n=0}^{\infty}\pi^n[x_n] \in W_{A,r}(R)$, on a $x = \pi(\pi^{-1}[x_0] + x')$, avec $x' \in W_A(R) \subset S_{A,\mathfrak{a}}$ et $\pi^{-1}[x_0] \in S_{A,\mathfrak{a}}$, d'où l'on déduit que $W_{A,r}(R) \subset \pi S_{A,\mathfrak{a}}$, donc que, pour tout entier $n \geq 0$, $W_{A,rn}(R) \subset \pi^n S_{A,\mathfrak{a}}$.

Si maintenant $m \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in W_{A, mr}(R)$, alors, pour tout $n \geq 1$, $\gamma^n \in W_{A, mrn}(R) \subset \pi^{mn} S_{A, \mathfrak{a}}$, donc $n^{-1}\gamma^n \subset n^{-1}\pi^{mn} S_{A, \mathfrak{a}}$.

Pour tout $\beta = 1 + \gamma \in W_A^+(R)$, il existe un entier s tel que, si l'on pose $\beta^{p^s} = 1 + \gamma_s$, on ait $\gamma_s \in W_{A, r}(R)$. On a alors $n^{-1}\gamma_s^n \in n^{-1}\pi^n S_{A, \mathfrak{a}}$, pour tout $n \geq 1$, et, comme $n^{-1}\pi^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, la série de terme général $(-1)^{n+1} n^{-1}\gamma_s^n$ converge dans $K \otimes_A \hat{S}_{A, \mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}, K}^+$ et $\log \beta^{p^s} \in B_{\mathfrak{a}, K}^+$. Il en est de même de $\log \beta = p^{-s} \log \beta^{p^s}$.

Pour tout entier m suffisamment grand, on a $v(n^{-1}\pi^{mn}) = mn - ev_p(n) \geq m$, si $n \geq 1$; par conséquent, si $\gamma \in W_{A, m}(R)$, $n^{-1}\gamma^n \in \pi^m S_{A, \mathfrak{a}}$ et $\log(1 + \gamma) \in \pi^m S_{A, \mathfrak{a}}$. Comme les $1 + W_{A, mr}(R)$, pour $m \in \mathbf{N}$, forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $W_A^+(R)$, la continuité en résulte.

B) *L'anneau B est de Barsotti-Tate.*

4.10. On note P_0 le corps des fractions de $W(\bar{k})$, P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\bar{K}$ (on a donc $P = P_0 K$) et $\bar{P}$ la fermeture algébrique de P dans C (c'est une clôture algébrique de P et c'est un sous-corps dense de C). Notons σ: $P_0 \to P_0$ le Frobenius absolu et choisissons un élément non nul t de T.

Rappelons (cf. [Fo2], no. 7.2) que l'on appelle $(\bar{K}/K)$-*anneau galoisien filtré* la donnée d'un anneau commutatif B contenant P_0 muni

a) d'une application bijective F: $B \to B$, σ-semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau;

b) d'une filtration de $B_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_0} B$ par des sous-$\bar{P}$-espaces vectoriels $(B_{\bar{P}}^i)_{i \in \mathbf{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée, telle que $B_{\bar{P}}^i B_{\bar{P}}^j \subset B_{\bar{P}}^{i+j}$, si $i, j \in \mathbf{Z}$;

c) d'une action de G, Galois-semi-linéaire (i.e., additive et telle que $g(\lambda b) = g\lambda \cdot gb$ si $g \in G$, $\lambda \in P_0$, $b \in B$), compatible avec la structure d'anneau, qui commute à l'action de F et qui, lorsqu'on l'étend par Galois-semi-linéarité à $B_{\bar{P}}$, respecte la filtration. On suppose en outre que l'action de Galois est continue sur tout sous-P_0-espace vectoriel de dimension finie stable par G.

Par exemple, le sous-anneau $P_0[T, T^{-1}]$ de B_{DR}, formé des $\sum_{i \in \mathbf{Z}} c_i t^i$ (avec les c_i presque tous nuls) qui vérifient $c_i \in P_0$ pour tout i, a une structure de $(\bar{K}/K)$-anneau galoisien filtré: l'action de F est donnée par $F(\sum c_i t^i) = \sum p^i \sigma(c_i) t^i$; la filtration et l'action de G sont évidentes.

4.11. Soit alors B^+ l'intersection des $B_{\mathfrak{a}}^+$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux propres de R. C'est un sous-anneau de B_{DR}^+ qui contient $W_{K_0}(R)$ donc aussi $W_{K_0}(\bar{k}) = P_0$; on a aussi $T \subset B^+$, d'après la proposition 4.9 et B^+ est un sous-anneau de B_{DR} contenant $P_0[T]$.

Nous notons B le sous-anneau $B^+[t^{-1}]$ de B_{DR}. Cette définition ne dépend pas du choix de t et l'application évidente de $P_0[T, T^{-1}] \otimes_{P_0[T]} B^+$ dans B nous permet d'identifier ces deux anneaux. En particulier, B contient $P_0[T, T^{-1}]$ et l'on a $B = \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} t^{-i} B^+$.

L'anneau B a une structure naturelle de $(\overline{K}/K)$-anneau galoisien filtré (contenant $P_0[T, T^{-1}]$, comme sous-$(\overline{K}/K)$-anneau galoisien filtré):

a) L'anneau $W_{K_0}(R) = K_0 \otimes_{W(k)} W(R)$ est muni d'une application F: $W_{K_0}(R) \to W_{K_0}(R)$, σ-semi-linéaire: on a $F(\Sigma_{n \gg -\infty} p^n [x_n]) = \Sigma p^n [x_n^p]$. Pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R, $FS_{\mathfrak{a}} \subset S_{\mathfrak{a}}$ et F opère par continuité sur la complétion p-adique $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ de $S_{\mathfrak{a}}$, puis, par extension des scalaires, sur $B_{\mathfrak{a}}^+ = K_0 \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{a}}$. Il est clair que F induit une bijection de $S_{\mathfrak{a}}$ sur $S_{\mathfrak{a}^p}$, donc de $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ sur $\hat{S}_{\mathfrak{a}^p}$ et de $B_{\mathfrak{a}}^+$ sur $B_{\mathfrak{a}^p}^+$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal propre de R, on a $B^+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\mathfrak{a}^{p^n}}$ et on en déduit que la restriction de F à B^+ est une bijection de B^+ sur lui-même.

Il est clair que t est de la forme $t = \log([\varepsilon])$, avec $\varepsilon \in U_R^+$ et que l'application log commute à F; on a donc

$$Ft = \log(F([\varepsilon])) = \log([\varepsilon^p]) = \log\big(([\varepsilon])^p\big) = p \cdot \log([\varepsilon]) = pt.$$

On peut donc prolonger l'action de F à B en posant $F(t^{-1}) = p^{-1} t^{-1}$. On a bien ainsi muni l'anneau B d'une action bijective de F, σ-semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau, dont la restriction à $P_0[T, T^{-1}]$ est celle qui a déjà été définie.

b) Pour toute extension finie P' de P_0 contenue dans $\overline{P}$, pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R contenu dans $\mathfrak{a}_0$, l'inclusion de $P' \otimes_{P_0} B_{\mathfrak{a}}^+ = B_{\mathfrak{a}, P'}^+$ dans B_{DR}^+ (appliquer la proposition 4.7 au cas où le corps de base est le corps local P') induit une inclusion de $B_{P'}^+ = P' \otimes_{P_0} B^+$ dans B_{DR}^+ et aussi de $B_{P'} = P' \otimes_{P_0} B = P'[T, T^{-1}] \otimes_{P'[T]} B_{P'}^+$ dans B_{DR}.

Si P'' est une extension finie de P' contenue dans $\overline{P}$, $B_{P''}$ s'identifie à $P'' \otimes_{P'} B_{P'}$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_{P'} \arrow[dr, hook] \arrow[d] & \\ B_{P''} \arrow[r, hook] & B_{\mathrm{DR}}, \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est celle qui à $b \in B_{P'}$ associe $1 \otimes_{P'} b$, est commutatif. Par passage à la limite, on peut donc identifier $B_{\overline{P}} = \overline{P} \otimes_{P_0} B$ à un sous-anneau de B_{DR}. On le munit de la filtration induite par celle de B_{DR}; i.e., pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $B_{\overline{P}}^i = B_{\overline{P}} \cap B_{\mathrm{DR}}^i$. Il est clair que cette filtration a bien les propriétés requises.

c) Enfin, il est clair que l'action naturelle de G sur B a bien les propriétés requises.

4.12 THÉORÈME. *Le* $(\bar{K}/K)$*-anneau galoisien filtré* B *est un* $(\bar{K}/K)$*-anneau de Barsotti-Tate.*

4.13. Avant de démontrer ce théorème, commençons par rappeler qu'il signifie (cf. [Fo2], no. 7.2) que B contient $P_0[T, T^{-1}]$ comme sous-$(\bar{K}/K)$-anneau galoisien filtré (ce qui, ici, est bien le cas) et vérifie les deux conditions suivantes:

(<u>Fil</u>) si $B_0 = \{\beta \in B \mid F\beta = \beta\}$, on a $B_0 \cap B_{\bar{P}}^0 = \mathbf{Q}_p$;

(<u>Tate</u>) il existe un monomorphisme θ: $\mathrm{gr}(B_{\bar{P}}) \to C[T, T^{-1}]$, qui, lorsqu'on le restreint à $\bar{P}[T, T^{-1}] = \bar{P} \otimes_{P_0} P_0[T, T^{-1}]$ est l'isomorphisme évidente de $\mathrm{gr}(\bar{P}[T, T^{-1}])$ sur $\bar{P}[T, T^{-1}]$ (ces deux conditions impliquent (cf. [Fo2], rem. de la p. 19) la condition

(<u>Gal</u>) on a $B^G = K_0$).

Rappelons aussi (cf. *op. cit.*) que cela implique que B, muni de F, de l'action de G, et de la filtration de $B_K = K \otimes_{K_0} B$ induite par l'inclusion de B_K dans $B_{\bar{P}}$ et par la filtration de $B_{\bar{P}}$ est un anneau de Barsotti-Tate (relativement au corps K).

Remarquons enfin que l'inclusion de $B_{\bar{P}}$ dans B_{DR} induit une inclusion de $\mathrm{gr}(B_{\bar{P}})$ dans $\mathrm{gr}(B_{\mathrm{DR}})$; le composé de cette inclusion avec l'isomorphisme de $\mathrm{gr}(B_{\mathrm{DR}})$ sur B_{HT} donne le monomorphisme θ cherché et B vérifie bien (<u>Tate</u>). Pour démontrer le théorème, la seule chose qui reste à faire est donc de prouver que B vérifie (<u>Fil</u>).

Pour cela, on peut supposer $K = K_0$, ce que nous faisons jusqu'à la fin du chapitre 4. En particulier, si v_p désigne la valuation de C normalisée par $v_p(p) = 1$, on a $v_R(x) = v_p(x^{(0)})$, pour tout $x \in R$. On a $B_K = B$, et, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $B^i = B_K^i$.

4.14 PROPOSITION. *Si* $\beta \in B^+$ *est tel que* $F^n\beta \in B^1$, *pour tout entier* $n \geq 0$, *alors* $\beta \in tB^+$ *(où* t *est un élément non nul de* T*).*

Démonstration. Soit $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}}$ un élément de R tel que $\varepsilon^{(0)}$ est une racine primitive p-ième de l'unité. On peut choisir $t = \log([\varepsilon])$. Posons $\mathfrak{a} = \{x \in R \mid v_R(x) \geq p/(p-1)\}$; comme $\mathfrak{a}_0 = \{x \in R \mid v_R(x) \geq 1\}$, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_0$ donc $\hat{S}_{\mathfrak{a}} \subset \hat{S}_{\mathfrak{a}_0}$.

Commençons alors par établir deux lemmes:

4.15 LEMME. *On a* $t \in \hat{S}_{\mathfrak{a}}$. *Si* $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *sont des éléments quelconques de* $W(R)$, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n$ *converge dans* $\hat{S}_{\mathfrak{a}_0}$. *Si l'on note* $\hat{S} = W(R)[[t]]$ *le sous-anneau de* $\hat{S}_{\mathfrak{a}_0}$ *formé des éléments qui peuvent s'écrire sous cette forme,* $\hat{S}$ *est séparé et complet pour la topologie p-adique et l'on a* $\hat{S}_{\mathfrak{a}} \subset \hat{S} \subset \hat{S}_{\mathfrak{a}_0}$.

Démonstration du lemme. Si $[\varepsilon] = 1 + \gamma$, on a $t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-1} \gamma^n$. Comme $t \in B^+ \subset B_{\mathfrak{a}}^+ = K \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{a}}$, pour montrer que $t \in \hat{S}_{\mathfrak{a}}$, il suffit de vérifier que $n^{-1}\gamma^n \in S_{\mathfrak{a}}$, pour tout entier $n \geq 1$.

Si $\gamma = \Sigma p^n[x_n]$, on a $x_0 = \varepsilon - 1$ et on en déduit que $v_R(x_0) = v_p(x_0^{(0)}) = 1/(p-1)$.

Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $n^{-1}\gamma^n - n^{-1}[x_0^n] \in pS_\alpha$: en effet, $\gamma \equiv [x_0] \bmod pW(R)$ donc $\gamma \equiv [x_0] \bmod pS_\alpha$; si $n = mp^r$, avec $(m, p) = 1$, on a donc $\gamma^m \equiv [x_0^m] \bmod pS_\alpha$, d'où $\gamma^{mp^r} \equiv [x_0^{mp^r}] \bmod p^{r+1}S_\alpha$; et $n^{-1}\gamma^n \equiv n^{-1}[x_0^n] \bmod pS_\alpha$, puisque $n^{-1}p^{r+1}S_\alpha = m^{-1}pS_\alpha = pS_\alpha$.

Toujours en posant $n = mp^r$, avec $(m, p) = 1$, comme $v_R(x_0^n) = n/(p-1) \geq rp/(p-1)$, pour tout $n \geq 1$, on a $p^{-r}[x_0^n] \in S_\alpha$ et $n^{-1}[x_0^n] = m^{-1}p^{-r}[x_0^n]$ aussi. Par conséquent, $n^{-1}\gamma^n \in S_\alpha$ et on a bien $t \in \hat{S}_\alpha$.

Si $p \neq 2$ et $n \geq p+1$, ou si $p = 2$ et $n \neq 1, 2, 4$, on voit que $n/(p-1) \geq (r+1)p/(p-1)$, donc que $p^{-r-1}[x_0^n] \in S_\alpha$, d'où $n^{-1}[x_0^n] = p \cdot m^{-1}p^{-r-1}[x_0^n] \in pS_\alpha$. Il en résulte que, si l'on pose

$$t' = \begin{cases} \sum_{n=1}^{p} (-1)^{n+1} n^{-1}[x_0^n] & \text{si } p \neq 2, \\ [x_0] + 2^{-1}[x_0^2] + 2^{-2}[x_0^4] & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

on a $t \equiv t' \bmod p\hat{S}_\alpha$.

A fortiori, on a $t \equiv t' \bmod p\hat{S}_{\alpha_0}$ et $t^{p-1} \equiv (t')^{p-1} \bmod p\hat{S}_{\alpha_0}$. Un calcul simple montre que $(t')^{p-1} \in pS_{\alpha_0}$; on a donc $t^{p-1} \in p\hat{S}_{\alpha_0}$ et toute série de la forme $\Sigma \alpha_n t^n$ converge dans $\hat{S}_{\alpha_0}$. Comme $\hat{S} \subset \hat{S}_{\alpha_0}$, $\hat{S}$ est séparé pour la topologie p-adique et il est immédiat qu'il est aussi complet.

Enfin, si on pose $\hat{\xi} = p^{-1}[x_0^p]$, on voit que S_α est la sous-$W(R)$-algèbre de $W_K(R)$ engendrée par $\hat{\xi}$. Mais on a $\hat{\xi} \in \hat{S} + p\hat{S}_\alpha$ (si $p \neq 2$, $\hat{\xi} - t' \in W(R)$, donc $\hat{\xi} \in W(R)[t] + p\hat{S}_\alpha \subset \hat{S} + p\hat{S}_\alpha$; si $p = 2$, $\hat{\xi}^2 + \hat{\xi} = t' - [x_0] \in W(R)[t] + p\hat{S}_\alpha \subset \hat{S} + p\hat{S}_\alpha$ et on vérifie facilement que les deux solutions de l'équation $X^2 + X = t' - [x_0]$ dans B_{DR} sont dans $\hat{S} + p\hat{S}_\alpha$), donc $S_\alpha \subset \hat{S} + p\hat{S}_\alpha$, d'où aussi $\hat{S}_\alpha \subset \hat{S} + p\hat{S}_\alpha$, ce qui implique $\hat{S}_\alpha \subset \hat{S}$ puisque $\hat{S}$ est complet pour la topologie p-adique.

4.16 Lemme. *Soit* φ: $W(R) \to (A_c)^{\mathbf{N}}$ *l'application définie par* $\varphi(\alpha) = (\theta_0(F^n\alpha))_{n \in \mathbf{N}}$. *Alors* $\ker \varphi \subset p\hat{S}_\alpha$.
(Rappelons que $W(R)$ et $\hat{S}_\alpha$ sont tous les deux des sous-anneaux de B_α^+.)

Démonstration. Soit $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[y_n]$ un élément du noyau de φ. Si l'on pose $\eta_n = y_n^{(0)}$, on a

$$0 = \theta_0(F^m\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \eta_n^{p^m}, \quad \text{pour tout entier } m \geq 0.$$

Il suffit de démontrer que $v_R(y_0) = v_p(\eta_0) \geq p/(p-1)$. Comme $p/(p-1) = \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r}$, il suffit de vérifier que, pour tout couple $(r, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, on a $v_p(\eta_m) \geq p^{-m}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r})$. On procède par récurrence en ordonnant les couples (r, m) par ordre lexicographique:

a) si $(r, m) = (0, 0)$, on a $\theta_0(\alpha) \equiv \eta_0 \pmod{pA_C}$; donc $v_p(\eta_0) \geq 1$;

b) si $r = 0$, mais $m \neq 0$, on a

$$0 = \theta_0(F^m\alpha) \equiv \sum_{n=0}^{m-1} p^n \eta_n^{p^m} + p^m \eta_m^{p^m} \qquad \left(\operatorname{mod} p^{m+1}A_C\right);$$

par hypothèse de récurrence, pour $0 \leq n \leq m-1$, $v_p(\eta_n) \geq p^{-n}$, donc $v_p(p^n\eta_n^{p^m}) \geq n + p^{m-n} \geq m + 1$ et on doit avoir $v_p(p^m\eta_m^{p^m}) \geq m + 1$, i.e., $m + p^m v_p(\eta_m) \geq m + 1$, ou $v_p(\eta_m) \geq p^{-m}$;

c) si $r \neq 0$, on a

$$0 = \theta_0(F^m\alpha) = \sum_{n=0}^{m-1} p^n \eta_n^{p^n} + p^m \eta_m^{p^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} p^n \eta_n^{p^m};$$

par hypothèse de récurrence,

—pour $0 \leq n \leq m-1$, $v_p(\eta_n) \geq p^{-n}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r})$, donc

$$v_p\left(p^n\eta_n^{p^m}\right) \geq n + p^{m-n}\left(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}\right) \geq m + \left(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}\right);$$

—pour $n \geq m + 1$, $v_p(\eta_n) \geq p^{-n}(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r+1})$, donc

$$v_p\left(p^n\eta_n^{p^m}\right) \geq n + p^{m-n}\left(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r+1}\right) \geq m + \left(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}\right).$$

On doit donc avoir $v_p(p^m\eta_m^{p^m}) \geq m + (1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r})$, ou encore

$$v_p(\eta_m) \geq p^{-m}\left(1 + p^{-1} + \cdots + p^{-r}\right).$$

4.17. *Fin de la démonstration de la proposition* 4.14. Comme $B^+ \subset B_\alpha^+ = K \otimes_{W(k)} \hat{S}_\alpha$, quitte à multiplier β par une puissance de p convenable, on peut supposer que β appartient à $\hat{S}_\alpha$ donc à $\hat{S}$ (cf. lemme 4.15). Il suffit donc de montrer que l'idéal J de $\hat{S}$ formé des β vérifiant $F^n\beta \in B^1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, est l'idéal engendré par t (l'inclusion $t\hat{S} \subset J$ est évidente).

Soit $\beta \in J$. Comme $\beta \in \hat{S} = W(R)[[t]]$, on peut écrire $\beta = t\gamma + \delta$, avec $\gamma \in \hat{S}$ et $\delta \in W(R)$. Comme $t\gamma \in J$, $\delta \in J \cap W(R) = \ker\varphi$ et le lemme 4.16 montre que $\delta \in p\hat{S}_\alpha \subset p\hat{S}$. Il est clair que $\delta' = p^{-1}\delta \in J$ et on a donc $J \subset t\hat{S} + pJ$. Comme $\hat{S}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, on en déduit que $J \subset t\hat{S}$.

4.18. *Remarque*. Soit $W(A_C)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A_C. L'application, qui à $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in W(A_C)$ associe $w(a) = (w_0(a), w_1(a), \ldots, w_n(a), \ldots)$, avec $w_n(a) = a_0^{p^n} + pa_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n a_n$, est un homomorphisme injectif de $W(A_C)$ dans $(A_C)^{\mathbf{N}}$. Il est facile de voir que, si φ est l'application définie au lemme 4.16, on a $\operatorname{im}\varphi \subset \operatorname{im} w$. Il existe donc un homomorphisme d'anneaux $\psi\colon W(R) \to W(A_C)$ et un seul tel que $w \cdot \psi = \varphi$. On peut prolonger l'application ψ à l'anneau $\hat{S}$ défini au lemme 4.15 en posant $\psi(\alpha + t\beta) = \psi(\alpha)$, si $\alpha \in W(R)$, $\beta \in \hat{S}$ (si $\alpha + t\beta = \alpha' + t\beta'$, on a $\psi(\alpha) = \psi(\alpha')$ et le prolongement est bien défini). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & t\hat{S} \cap W(R) & \to & W(R) & \to & W(A_C) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 \to & t\hat{S} & \to & \hat{S} & \to & W(A_C) \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et $\psi(W(R)) = \psi(\hat{S})$. Je ne connais pas d'application de ce résultat et j'ignore si ψ est surjective.

4.19 Proposition. *L'intersection des $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux propres de R est égale à $W(R)$.*

Démonstration. Comme $W(R)$ est contenu dans l'intersection, il suffit de démontrer l'inclusion dans l'autre sens. Choisissons un élément non nul x appartenant à l'idéal maximal de R et soit $\mathfrak{b}$ l'idéal de R engendré par x. Soit $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{S}_{\mathfrak{b}^r}$. Il s'agit de montrer que $X \subset W(R)$. Comme $W(R)$ et les $\hat{S}_{\mathfrak{b}^r}$ sont séparés et complets pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier que $X \subset W(R) + pX$.

Pour tout entier $r \geq 1$, posons $\hat{\xi}_r = p^{-1}[x^r]$; alors, $S_{\mathfrak{b}^r}$ est la sous-$W(R)$-algèbre de $W_K(R)$ engendrée par $\hat{\xi}_r$. Si l'on pose $\tilde{S}_r = S_{\mathfrak{b}^r}/pS_{\mathfrak{b}^r} = \hat{S}_{\mathfrak{b}^r}/p\hat{S}_{\mathfrak{b}^r}$, on sait (cf. lemme 4.5) que $\tilde{S}_r$ s'identifie à l'anneau $(R/\mathfrak{b}^r)[\xi_r]$ des polynômes en la variable ξ_r à coefficients dans $R/\mathfrak{b}^r$; si $\nu_r\colon \hat{S}_{\mathfrak{b}^r} \to \tilde{S}_r$ est la projection canonique et si $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \hat{\xi}_r^n$, avec les $\beta_n \in W(R)$ presque tous nuls, est un élément de $S_{\mathfrak{b}^r}$, on a $\nu_r(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_r(\beta_n)\xi_r^n$, en désignant encore par $\nu_r\colon W(R) \to R/\mathfrak{b}^r$ le composé des projections canoniques

$$W(R) \to R \to R/\mathfrak{b}^r.$$

Soit alors $\alpha \in X$. Pour tout entier $r \geq 1$, on peut écrire

$$\nu_r(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_r(\alpha_{r,n})\xi_r^n, \quad \text{avec les } \alpha_{r,n} \in W(R),$$

presque tous nuls pour r fixé (les $\alpha_{r,n}$ ne sont pas uniquement déterminés, mais les $\nu_r(\alpha_{r,n})$ le sont).

Si r et s sont des entiers vérifiant $s \geq r \geq 1$, soit $\eta_{s,r}\colon \tilde{S}_s \to \tilde{S}_r$ l'application déduite, par passage aux quotients, de l'inclusion de $\hat{S}_{\mathfrak{b}^s}$ dans $\hat{S}_{\mathfrak{b}^r}$; comme $\hat{\xi}_s = [x^{s-r}]\hat{\xi}_r$, on a

$$\eta_{s,r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \nu_s(\beta_n)\xi_s^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_r([x^{n(s-r)}]\beta_n)\xi_r^n.$$

En particulier, $\eta_{2r,r}(\sum_{n=0}^{\infty}\nu_{2r}(\beta_n)\xi_{2r}^n) = \nu_r(\beta_0)$, car $\nu_r([x^{nr}]) = 0$, pour tout entier $n \geq 1$.

Il en résulte que les $\nu_r(\alpha_{r,n})$ sont nuls si $n \geq 1$, et on peut donc écrire $\nu_r(\alpha) = \nu_r(\alpha_{r,0})$. Si, pour tout r, on choisit un relèvement u_r de $\nu_r(\alpha_{r,0})$ dans R, on voit que $u_{r+1} \equiv u_r \bmod \mathfrak{b}^r$, et la suite des u_r converge dans R vers un élément u; de plus $\nu_r(\alpha) = \nu_r([u])$, pour tout r. Donc $\nu_r(\alpha - [u]) = 0$, pour tout r et $\alpha - [u] \in pX$, d'où $X \subset W(R) + pX$.

4.20. *Démontrons maintenant le théorème* 4.12. Rappelons (cf. no. 4.13) qu'il suffit de vérifier que si $\beta \in B^0$ vérifie $F\beta = \beta$, alors $\beta \in \mathbf{Q}_p$.

Montrons d'abord que $\beta \in B^+$: Comme on a $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} t^{-i}B^+$, il suffit de vérifier que le plus petit entier $i \geq 0$ tel que $t^i\beta \in B^+$ est égal à 0. Sinon on aurait $\beta = t^{-i}\beta'$, avec $i > 0$, $\beta' \in B^+$, et $\beta \in B^0$ implique que $\beta' \in B^i \subset B^1$; pour tout entier $n \geq 0$,

$$F^n\beta' = F^n(t^i\beta) = p^{ni}t^iF^n\beta = p^{ni}t^i\beta = p^{ni}\beta' \in B^1.$$

La proposition 4.14 montre que $\beta' = t\beta''$, avec $\beta'' \in B^+$ et $\beta = t^{-i+1}\beta''$, ce qui contredit la minimalité de i.

Choisissons un idéal propre $\mathfrak{b}$ de R. Comme $\beta \in B^+ \subset B_{\mathfrak{b}}^+ = K \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{b}}$, on peut, quitte à multiplier β par une puissance de p, supposer que $\beta \in \hat{S}_{\mathfrak{b}}$. Comme $F^n\hat{S}_{\mathfrak{b}} = \hat{S}_{\mathfrak{b}^{p^n}}$, on a $\beta = F^n\beta \in \hat{S}_{\mathfrak{b}^{p^n}}$, pour tout n, et $\beta \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \hat{S}_{\mathfrak{b}^{p^n}}$ qui est aussi l'intersection des $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux propres de R. D'après la proposition 4.19, on a donc $\beta \in W(R)$. Si $\beta = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, on a $F\beta = (u_0^p, u_1^p, \ldots, u_n^p, \ldots)$, donc, pour tout n, $u_n^p = u_n$; i.e., $u_n \in \mathbf{F}_p$, et $\beta \in W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$.

4.21. *Remarques*. 1) Pour tout entier m et tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R, soit $BW_K(R; m, \mathfrak{a})$ le sous-ensemble de $BW_K(R)$ formé des $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi^n[b_n]$ qui vérifient $b_n \in \mathfrak{a}$ si $n < m$; c'est un sous-$W_A(R)$-module de $BW_K(R)$. Notons $Biv_K(R)$ le $W_A(R)$-module $\varprojlim_{m,\mathfrak{a}} BW_K(R)/BW_K(R; m, \mathfrak{a})$, que l'on munit de la topologie de la limite projective (avec la topologie discrète sur chaque quotient).

On voit que $BW_K(R)$ s'identifie à un sous-$W_A(R)$-module de $Biv_K(R)$ et que la multiplication dans $BW_K(R)$, muni de la topologie induite par celle de $Biv_K(R)$, est continue. Par passage à la limite, on peut donc définir une multiplication sur $Biv_K(R)$ qui devient ainsi un anneau commutatif topologique contenant $BW_K(R)$ sur lequel G opère continûment. Lorsque $K = K_0 = \operatorname{Frac} W(k)$, $Biv_K(R)$, qui est aussi muni d'une action de Frobenius, n'est autre que l'anneau $Biv(R)$ introduit par Barsotti ([Ba], Cap. 2).

2) Pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R, la topologie de $BW_K(R)$ induite par celle de $B_{\mathfrak{a},K}^+$ est plus fine que celle qui est induite par la topologie de $Biv_K(R)$, d'où,

par continuité, une application continue de $B^+_{\mathfrak{a},K}$ dans $Biv_K(R)$ qui est en fait injective et qui permet d'identifier $B^+_{\mathfrak{a},K}$ à un sous-anneau de $Biv_K(R)$ (en particulier, chaque $B^+_{\mathfrak{a}}$ est un sous-anneau de $Biv(R)$ et leur intersection B^+ a fortiori).

3) En revanche, la topologie de $BW_K(R)$ induite par celle de B^+_{DR} n'est ni plus fine, ni moins fine que celle qui est induite par $Biv_K(R)$. L'identité de $BW_K(R)$ ne se prolonge donc par continuité ni en une application de B^+_{DR} dans $Biv_K(R)$, ni en une application de $Biv_K(R)$ dans B^+_{DR}.

J'ignore si l'anneau $Biv_K(R)$ peut être utile pour la classification de certaines représentations p-adiques. En particulier, on a $K \subset (Biv_K(R))^G$, mais je ne sais même pas si cette inclusion est une égalité.

5. Représentations cristallines et potentiellement cristallines

Rappelons que $K_0 = \mathrm{Frac}(W(k))$, $P_0 = \mathrm{Frac}(W(\bar{k}))$, $P = KP_0$, $\bar{P} =$ fermeture algébrique de P dans C. On pose $e = [K: K_0] = [P: P_0]$.

5.1. Rappelons ([Fo2], no. 1.2) que l'on appelle *module filtré* (on dira *module de Dieudonné filtré au-dessus de* K, lorsque l'on voudra être plus précis) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni

i) d'une application $F: D \to D$, bijective, σ-semi-linéaire,

ii) d'une structure de K-espace vectoriel filtré (i.e., d'objet de $\underline{\mathrm{Fil}}_K$) sur le K-espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$.

On note $\underline{MF}_K$ la catégorie des modules filtrés et $\underline{MF}_K^{\varphi}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K$ formée des objets dont le K_0-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie (attention au changement de notation par rapport à [Fo2], où la première catégorie n'avait pas de nom et la seconde s'appelait $\underline{MF}_K$). Ce sont des catégories additives, $\mathbf{Q}_p$-linéaires, admettant des limites inductives et projectives finies, mais qui ne sont pas abéliennes. On définit, de façon évidente (*loc. cit.*), le produit tensoriel de deux modules filtrés, le dual d'un module filtré.

Notons $\underline{MF}_K^f$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^{\varphi}$ dont les objets sont les *modules filtrés faiblement admissibles* (cf. [Fo2], no. 4.14; dans [Fo2], les modules filtrés faiblement admissibles ne sont définis que lorsque k est algébriquement clos, mais la définition garde un sens sans cette hypothèse; en outre, si D est un objet de $\underline{MF}_K$, $P_0 \otimes_{K_0} D = D_{P_0}$ a une structure naturelle de module de Dieudonné filtré au-dessus de P, et D est faiblement admissible si et seulement si D_{P_0} l'est; voir à ce sujet [La2], §2). La catégorie $\underline{MF}_K^f$ est abélienne.

Pour toute représentation p-adique V, $\underline{D}_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ a une structure naturelle de module filtré. Comme $K \otimes_{K_0} \underline{D}_B(V) = K \otimes_{K_0} (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$ s'identifie à $(B_K \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \subset (B_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G = \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$, on a

$$\dim_{K_0} \underline{D}_B(V) \leq \dim_K \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V) \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V.$$

On dit que la représentation p-adique V est *cristalline* (ou, dans la terminologie de [Fo2], B-admissible) si $\dim_{K_0} \underline{D}_B(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ (ou $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations cristallines. C'est donc une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$, et, si V est cristalline, $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$ s'identifie à $K \otimes_{K_0} \underline{D}_B(V)$.

Enfin, on dit qu'un objet D de $\underline{MF}_K^{\varphi}$ est *admissible* (ou, plus précisément, B-admissible) s'il existe une représentation p-adique cristalline V telle que $D \simeq \underline{D}_B(V)$ et on note $\underline{MF}_{K,B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^{\varphi}$ dont les objets sont les modules filtrés admissibles.

5.2. L'énoncé suivant rassemble, outre des résultats que l'on vient de voir, des résultats épars dans [Fo2] (no. 3.4.1, 3.4.3, 3.6.5, 3.6.7, 4.4.5 et 4.5.1):

THÉORÈME. i) *La catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual.*

ii) *La catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^f$, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual.*

iii) *Le foncteur $\underline{D}_B$ induit une équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ et $\underline{MF}_{K,B}$; si V, V_1, V_2 sont des représentations p-adiques cristallines, on a des identifications naturelles*

$$\underline{D}_B(V^*) = (\underline{D}_B(V))^*, \qquad \underline{D}_B(V_1 \otimes V_2) = \underline{D}_B(V_1) \otimes \underline{D}_B(V_2).$$

iv) *Le foncteur $\underline{V}_B$, qui à tout module filtré admissible D associe $(B \otimes_{K_0} D)[0] = \{v \in B \otimes_{K_0} D \mid Fv = v \text{ et } v \in \sum_{i \in \mathbf{Z}} B_K^{-i} \otimes_K D_K^i\}$ est un quasi-inverse de la restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$; si D, D_1, D_2 sont des modules filtrés admissibles, on a des identifications naturelles*

$$\underline{V}_B(D^*) = (\underline{V}_B(D))^*, \qquad \underline{V}_B(D_1 \otimes D_2) = \underline{V}_B(D_1) \otimes \underline{V}_B(D_2).$$

v) *Si V est une représentation p-adique cristalline $K \otimes_{K_0} \underline{D}_B(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$.*

5.3. *Conjecture. On a* $\underline{MF}_{K,B} = \underline{MF}_K^f$, i.e., *tout module filtré faiblement admissible est admissible.*

On dispose de résultats partiels dans cette direction:

—si $e = 1$ (on a alors $D_K = D$, pour tout module filtré D) et si D est un module filtré faiblement admissible tel qu'il existe un entier j pour lequel $D^j = D$ et $D^{j+p} = 0$, alors D est admissible; c'est le résultat principal de [F-L];

—si D est un module filtré faiblement admissible tel qu'il existe un entier j pour lequel $D_K^j = D_K$, $D_K^{j+2} = 0$ et si, ou bien $e \leq p-1$, ou bien $\dim_K D_K^1 \leq 1$, alors D est admissible; si $j=0$, c'est une conséquence de [La2], th. du no. 2.1, dans le premier cas (resp. de [La1], th. du no. 2.1, dans le second cas) et du fait que B est adapté aux groupes p-divisibles (voir le §6); le cas général s'en déduit par une torsion à la Tate.

5.4. *Remarques*. a) On peut aussi définir des foncteurs contravariants $\underline{D}_B^*$: $\underline{\mathrm{Rep}}_B(V) \to \underline{MF}_{K,B}$ et $\underline{V}_B^*$: $\underline{MF}_{K,B} \to \underline{\mathrm{Rep}}_B(V)$ en posant $\underline{D}_B^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B)$ et $\underline{V}_B^*(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B)$. On voit que $\underline{D}_B^*(V)$ s'identifie à $\underline{D}_B(V^*)$ et $\underline{V}_B^*(D)$ à $\underline{V}_B(D^*)$, d'où toutes sortes de bonnes propriétés des foncteurs $\underline{D}_B^*$ et $\underline{V}_B^*$.

b) Le théorème implique que $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ et le groupe pro-algébrique $\mathbf{H}^B$, défini sur $\mathbf{Q}_p$, "enveloppe pro-algébrique de l'image de Galois dans les représentations cristallines", est un quotient de $\mathbf{H}^{\mathrm{DR}}$ (cf. rem. (a) du no. 3.11).

c) Le théorème implique que le foncteur $\underline{\omega}_B$, qui à V associe le K_0-espace vectoriel sous-jacent à $\underline{D}_B(V)$, est un foncteur fibre. Le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{Dieud}}^B$ des $\otimes$-automorphismes de ce foncteur est un groupe pro-algébrique défini sur K_0 qui est une K_0-forme intérieure de $\mathbf{H}^B \times_{\mathbf{Q}_p} K_0$.

d) Soit U une représentation cristalline et soit $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ la sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ engendrée par U et U^* (cf. no. 3.10, rem. (d)). C'est une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ et l'on dispose de (au moins!) cinq foncteurs fibres:

—Les trois premiers $\underline{\omega}_U$, $\underline{\omega}_{U,\mathrm{HT}}$ et $\underline{\omega}_{U,\mathrm{DR}}$ ont été définis au no. 3.10 (rem. (d)); le groupe des $\otimes$-automorphismes de $\underline{\omega}_U$ (resp. $\underline{\omega}_{U,\mathrm{HT}}$, $\underline{\omega}_{U,\mathrm{DR}}$)) est un groupe algébrique $\mathbf{H}_U$ (resp. $\mathbf{H}_{U,\mathrm{HT}}, \mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$) défini sur $\mathbf{Q}_p$ (resp. K, K).

—Le quatrième, $\underline{\omega}_{U,B}$, est la restriction à $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ du foncteur $\underline{\omega}_B$; on note $\mathbf{H}_{U,B}$ le groupe algébrique, défini sur K_0, de ses $\otimes$-automorphismes.

—Pour définir le cinquième, commençons par noter h le ppcm des pentes des dénominateurs de $\underline{D}_B(U)$ (cf., par exemple, [Fo2], §4) et soit L_h l'unique extension de $\mathbf{Q}_p$ de degré h contenu dans P. Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ et toute pente α de $\underline{D}_B(V)$, $h\alpha \in \mathbf{Z}$; si, pour tout $\alpha \in \mathbf{Q}$ tel que $h\alpha \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\underline{D}'_{B,\alpha}(V) = \left\{ d \in \underline{D}_{B,P_0}(V) = P_0 \otimes_{K_0} \underline{D}_B(V) \mid F^h d = p^{h\alpha} d \right\},$$

on voit que les $\underline{D}'_{B,\alpha}(V)$ sont des L_h-espaces vectoriels de dimension finie, nulle pour presque tout α, et que l'application évidente

$$P_0 \otimes_{L_h} \Big(\bigoplus_{h\alpha \in \mathbf{Z}} \underline{D}'_{B,\alpha}(V) \Big) \to D_{B,P_0}(V)$$

est un isomorphisme. Le foncteur $\underline{\omega}'_{U,B}$, qui à V associe le L_h-espace vectoriel sous-jacent à $\underline{D}'_B(V) = \oplus_{h\alpha\in\mathbf{Z}}\underline{D}'_{B,\alpha}(V)$, est un foncteur fibre sur $\underline{\mathrm{Rep}}_U(G)$ à valeurs dans L_h. On note $\mathbf{H}'_{U,B}$ le groupe algébrique, défini sur L_h, de ses $\otimes$-automorphismes.

Les cinq groupes algébriques $\mathbf{H}_U$, $\mathbf{H}_{U,\mathrm{HT}}$, $\mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$, $\mathbf{H}_{U,B}$ et $\mathbf{H}'_{U,B}$ sont tous des formes intérieures les unes des autres. On a des isomorphismes canoniques $\mathbf{H}_{U,B}\times_{K_0}K \simeq \mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$, $\mathbf{H}_{U,B}\times_{K_0}P_0 \simeq \mathbf{H}'_{U,B}\times_{L_h}P_0$ et des isomorphismes non canoniques $\mathbf{H}_{U,\mathrm{HT}} \simeq \mathbf{H}_{U,\mathrm{DR}}$ (cf. rem. (d) du no. 3.10) et $\mathbf{H}_U\times_{\mathbf{Q}_p}P_0 \simeq \mathbf{H}_{U,B}\times_{K_0}P_0$ (cf. [Fo2], prop. 6.3.3). Il serait intéressant d'avoir plus de renseignements sur les torseurs qui font passer des uns aux autres.

5.5. *Autres remarques.* a) Pour tout entier $s \geq 1$, soit L_s l'unique extension de degré s de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans P_0; pour tout nombre rationnel α de la forme $\alpha = r/s$, avec r et s des entiers premiers entre eux et $s \geq 1$,

$$B_\alpha = \{b \in B \mid F^s b = p^r b\}$$

est un L_s-espace vectoriel. Si on pose $B_{\alpha,P_0} = P_0 \otimes_{L_s} B$, on voit que l'application évidente de $B' = \oplus_{\alpha\in\mathbf{Q}}B'_{\alpha,P_0}$ dans B est injective et nous l'utilisons pour identifier B' à un sous-anneau de B.

Comme tout P_0-espace vectoriel, de dimension finie, D, muni d'une action σ-semi-linéaire bijective de F, est engendré par les d qui vérifient $F^s d = p^r d$, pour r et s entiers convenables, on voit que

—pour toute représentation p-adique V, on a

$$\underline{D}_B(V) = \left(B' \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^G \qquad \text{et} \qquad \underline{D}^*_B(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B');$$

—pour tout module filtré admissible D, on a, avec des notations évidentes,

$$\underline{V}_B(D) = (B' \otimes D)[0] \qquad \text{et} \qquad \underline{V}^*_B(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B').$$

b) Rappelons que $\mathfrak{a}_0 = \{x \in R \mid v_R(x) \geq v(p)\}$. Pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de R contenu dans $\mathfrak{a}_0$, soit $B_\mathfrak{a} = B^+_\mathfrak{a}[t^{-1}]$ la sous-$B^+_\mathfrak{a}$-algèbre de B_{DR} engendrée par t^{-1} (où t est un élément non nul, arbitraire, de T). Il résulte de la remarque précédente que, pour tout sous-anneau B'' de $B_{\mathfrak{a}_0}$ contenant B' (en particulier, pour B'' égal à l'un des $B_\mathfrak{a}$), on a, avec des notations évidentes,

—$\underline{D}_B(V) = (B'' \otimes V)^G$ et $\underline{D}^*_B(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B'')$, si V est une représentation p-adique,

—et $\underline{V}_B(D) = (B'' \otimes D)[0]$ et $\underline{V}^*_B(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B'')$ si D est un module filtré admissible.

c) Posons $B'^+ = (\oplus_{\alpha\geq 0}B'_{\alpha,P_0}) \cap B^+$.

Soit D un module filtré admissible tel que $D^0_K = D_K$. On a alors $\underline{V}^*_B(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B'^+)$. En effet, si $v \in V = \underline{V}^*_B(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B')$,

—le fait que D est faiblement admissible avec $D_K^0 = D_K$ implique que toutes ses pentes sont ≥ 0 (cf. [Fo2], §4), donc que $v(D) \in \oplus_{\alpha\geq 0} B'_{\alpha, P_0}$;

—on a $v(D) \subset B^+$: il suffit de montrer que le plus petit entier $i \geq 0$ tel que $v(D) \subset t^{-i}B^+$ est égal à 0; sinon, on aurait $i > 0$ et il existerait $d \in D$ tel que $v(d) = t^{-i}b$, avec $b \in B^+$ mais $b \notin tB^+$; pour tout entier $n \geq 0$, $v(F^n d) = F^n(v(d)) = p^{-ni}t^{-i}F^n b$ doit appartenir à B^0 (puisque $D_K = D_K^0$), donc $F^n b \in B^i \subset B^1$; d'après la proposition 4.4, cela entraîne $b \in tB^+$, d'où une contradiction.

De la même manière, si V est une représentation p-adique cristalline telle que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, C(\chi^i)) = 0$, pour $i < 0$, on a $\underline{D}_B^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B'^+)$.

d) De la remarque précédente, il résulte que, pour tout sous-anneau B'' de $B_{\mathfrak{a}_0}$ contenant B'^+ , on a

—$\underline{V}_B^*(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(D, B'')$, pour tout module filtré admissible D tel que $D_K = D_K^0$;

—et $\underline{D}_B^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B'')$, pour toute représentation p-adique cristalline V telle que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, C(\chi^i)) = 0$, pour tout $i < 0$.

En particulier, on peut prendre pour B'' l'un quelconque des $B_{\mathfrak{a}}^+$, avec $\mathfrak{a}$ idéal non nul de R contenue dans $\mathfrak{a}_0$, ce qui est commode pour certaines applications (cf. [F-L]).

5.6. Rappelons (no. 3.8) que si I est le sous-groupe d'inertie de G, et si G' est un sous-groupe fermé de G tel que $G' \cap I$ est ouvert dans I, si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, alors V est de Hodge-Tate (resp. de de Rham) si et seulement si $\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V)$ l'est. Il est clair que, si V est cristalline, $\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V)$ l'est aussi, mais la réciproque est, en général, fausse.

Notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G)$ (ou, comme dans [Fo2], no. 7.3.2, $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathrm{pot}}(G)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations p-adiques V pour lesquelles il existe un sous-groupe fermé G' de G, avec $G' \cap I$ ouvert dans I, tel que $\underline{\mathrm{Res}}_{G/G'}(V)$ est cristalline.

On voit que $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G)$ est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{DR}}(G)$ contenant $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$. On renvoie à [Fo2], §7, pour une étude plus détaillée de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G)$ (qui est encore une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, et pour laquelle on dispose encore d'un foncteur $\underline{E}_B$ qui induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{pot}}(G)$ et la catégorie $\underline{MPF}_{K,B}$ des modules potentiellement filtrés admissibles).

6. Applications aux groupes p-divisibles

6.1. Rappelons (cf., par exemple, [Fo2], no. 5.1) qu'à tout groupe p-divisible Γ sur l'anneau des entiers A de K, on peut associer

—d'une part, une représentation p-adique $\underline{V}_p(\Gamma)$ (définie par $\underline{V}_p(\Gamma) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \underline{T}_p(\Gamma)$, où $\underline{T}_p(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ);

—d'autre part, un module filtré $\underline{D}_K(\Gamma)$ (le K_0-espace vectoriel sous-jacent est $K_0 \otimes_{W(k)} \underline{M}(\Gamma_k)$ où $\underline{M}(\Gamma_k) = \operatorname{Hom}(\Gamma_k, CW_k)$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale, l'action de F est induite par le Frobenius, et la filtration de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ est donnée par

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leq 0, \\ \underline{L}_K(\Gamma) & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2, \end{cases}$$

où $\underline{L}_K(\Gamma)$ désigne l'image canonique de $\underline{t}_\Gamma^*(K)$ dans D_K.

On peut considérer $\underline{V}_p$ (resp. $\underline{D}_K$) comme un foncteur $\mathbf{Q}_p$-linéaire covariant (resp. contravariant) de la catégorie des groupes p-divisibles sur A, à isogénie près, dans $\underline{\operatorname{Rep}}(G)$ (resp. dans $\underline{MF}_K^\varphi$) et ce foncteur est pleinement fidèle.

6.2 Théorème. *L'anneau B est un $(\bar{K}/K)$-anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles.*

Rappelons (cf. [Fo2], no. 7.2.6) que cela signifie que, pour tout corps local K' contenant K et contenu dans C, B, considéré comme anneau de Barsotti-Tate relativement à K', est adapté aux groupes p-divisibles définis sur l'anneau des entiers de K'. Il suffit de vérifier cette assertion lorsque $K' = K$. Cela signifie alors (cf. [Fo2], no. 5.1.4) que

i) pour tout groupe p-divisible Γ défini sur A, $\underline{V}_p(\Gamma)$ est B-admissible, i.e., cristalline;

ii) les foncteurs $\Gamma \mapsto \underline{D}_K(\Gamma)$ et $\Gamma \mapsto \underline{D}_B^*(\underline{V}_p(\Gamma))$ sont naturellement équivalents.

6.3. Pour démontrer le théorème, nous aurons besoins du module $BW(R)$ des "bivecteurs de Witt" à coefficients dans R, déjà introduit dans [Fo1], chap. V, § 1.

Pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R, notons $BW_{\mathfrak{a}}^u(R)$ le sous-ensemble de $W_{K_0}(R)$ formé des $\sum_{n \gg -\infty} p^n[x_n]$ qui vérifient $x_n \in \mathfrak{a}^{p^{-n}}$, pour tout $n < 0$. C'est un sous-$W(R)$-module de $W_{K_0}(R)$ qui est contenu dans $S_{\mathfrak{a}^p}$. On le munit de la topologie produit, avec la topologie induite par celle de R sur chaque composante, et on note $BW_{\mathfrak{a}}(R)$ le séparé complété de $BW_{\mathfrak{a}}^u(R)$ pour cette topologie. Par conséquent, $BW_{\mathfrak{a}}(R)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p^n[x_n]$, avec

$$x_n \in \begin{cases} R & \text{si } n \geq 0, \\ \mathfrak{a}^{p^{-n}} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Pour tout entier $m \geq 0$, $BW_{\mathfrak{a}}^{u}(R) \cap p^m S_{\mathfrak{a}^p}$ est l'ensemble des $\Sigma_{n \gg -\infty} p^n [x_n]$ qui vérifient

$$x_n \in \begin{cases} R & \text{si } n \geq m, \\ \mathfrak{a}^{p(m-n)} & \text{si } 0 \leq n < m, \\ \mathfrak{a}^{p(m-n)} \cap a^{p^{-n}} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On voit donc que les sous-A-modules $BW_{\mathfrak{a}}^{u}(R) \cap p^m S_{\mathfrak{a}^p}$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans $BW_{\mathfrak{a}}^{u}(R)$. En particulier, $BW_{\mathfrak{a}}(R)$ a maintenant une structure naturelle de $W(k)$-module topologique et s'identifie à un sous-$W(k)$-module fermé de $S_{\mathfrak{a}^p}$.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal propre de R, on note $BW(R)$ le K_0-espace vectoriel $K_0 \otimes_{W(k)} BW_{\mathfrak{a}}(R)$, que l'on munit de la topologie du produit tensoriel; si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont deux idéaux propres de R vérifiant $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$, l'inclusion de $BW_{\mathfrak{a}}^{u}(R)$ dans $BW_{\mathfrak{a}'}^{u}(R)$ induit un isomorphisme de $K_0 \otimes_{W(k)} BW_{\mathfrak{a}}(R)$ sur $K_0 \otimes_{W(k)} BW_{\mathfrak{a}'}(R)$, et la définition de $BW(R)$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{a}$. En particulier $BW(R)$ s'identifie, pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de R, à un sous-K_0-espace vectoriel fermé de $B_{\mathfrak{a}}^{+}$, donc à un sous-K_0-espace vectoriel de $B^+ = \cap B_{\mathfrak{a}}^{+}$.

On voit que $BW(R)$ est stable par G et par F. En outre $BW_K(R) = K \otimes_{K_0} BW(R)$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $K \otimes_{K_0} B^+ = B_K^+ \subset B_K \subset B_{\mathrm{DR}}$. On le munit de la filtration induite, i.e., pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $BW_K^i(R) = BW_K(R) \cap B_{\mathrm{DR}}^i$. On a ainsi muni $BW(R)$ d'une structure de module filtré sur lequel G opère.

6.4 Proposition. *Pour tout groupe p-divisible* Γ *sur* A, $\underline{V}_p(\Gamma)$ *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement en* Γ, *à* $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(\underline{D}_K(\Gamma), BW(R))$.

Démonstration. Ce n'est autre que le théorème 1 de [Fo1], p. 232, appliqué à $\mathfrak{S} = A_C$, anneau des entiers de C.

6.5. Rappelons ([Fo2], §4) que, si D est un module filtré de dimension finie h comme espace vectoriel sur K_0, on note $t_N(D)$ la pente de $\overset{h}{\wedge} D$ et $t_H(D)$ le plus grand entier i tel que $(\overset{h}{\wedge} D)_K^i \neq 0$.

Proposition. *Soit* D *un sous-*K_0*-espace vectoriel de dimension finie de* B, *stable par* F, *que l'on munit de la structure de module filtré induite par celle de* B (i.e. *on a* $D_K = K \otimes_{K_0} D \subset B_K$ *et on pose* $D_K^i = D_K \cap B_K^i = D_K \cap B_{\mathrm{DR}}^i$). *Alors* $t_H(D) \leq t_N(D)$.

6.6. *Montrons d'abord comment le théorèm* 6.2 *résulte des propositions* 6.4 *et* 6.5: Soit Γ un groupe p-divisible sur A et soit $D = \underline{D}_B^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B)$.

Utilisons la proposition 6.4 pour identifier $\underline{V}_p(\Gamma)$ à $\mathrm{Hom}_{MF_K}(\underline{D}_K(\Gamma), BW(R))$. L'application, qui à $d \in \underline{D}_K(\Gamma)$ associe l'application $v \mapsto v(d)$, est un morphisme de modules filtrés

$$\eta_\Gamma: \underline{D}_K(\Gamma) \to D,$$

canonique et fonctoriel en Γ.

Soit D' le noyau de η_Γ (dans la catégorie $\underline{MF}_K$; cf. [Fo2], no. 1.2); on a $D' = \bigcap_{v \in \underline{V}_p(\Gamma)} \mathrm{Ker}\, v$. Pour chaque $v \in \underline{V}_p(\Gamma)$, on a une suite exacte de modules filtrés (*op. cit.*)

$$0 \to \mathrm{Ker}\, v \to \underline{D}_K(\Gamma) \to \mathrm{Coim}\, v \to 0.$$

On a $t_N(\mathrm{Coim}\, v) = t_N(\mathrm{Im}\, v)$ et $t_H(\mathrm{Coim}\, v) \leq t_H(\mathrm{Im}\, v)$; comme $t_H(\mathrm{Im}\, v) \leq t_N(\mathrm{Im}\, v)$, d'après la proposition 6.5, on en déduit que $t_H(\mathrm{Coim}\, v) \leq t_N(\mathrm{Coim}\, v)$. Mais on sait que $\underline{D}_K(\Gamma)$ est faiblement admissible ([La1], prop. 1.4); en particulier, on a donc $t_H(\underline{D}_K(\Gamma)) = t_N(\underline{D}_K(\Gamma))$ d'où $t_H(\mathrm{Ker}\, v) \geq t_N(\mathrm{Ker}\, v)$, puisque t_H et t_N sont additives; comme l'admissibilité faible de $\underline{D}_K(\Gamma)$ implique aussi que $t_H(\mathrm{Ker}\, v) \leq t_N(\mathrm{Ker}\, v)$, on a $t_H(\mathrm{Ker}\, v) = t_N(\mathrm{Ker}\, v)$, et $\mathrm{Ker}\, v$ est faiblement admissible ([Fo2], prop. 4.2.1). Par conséquent, D', intersection d'une famille de modules filtrés faiblement admissibles, est lui-même faiblement admissible.

La faible admissibilité de D' implique ([La1], th. 1.8) qu'il existe une suite exacte de groupes p-divisibles sur A,

$$0 \to \Gamma'' \to \Gamma \to \Gamma' \to 0,$$

telle que $\underline{D}_K(\Gamma') = D'$ et $\underline{D}_K(\Gamma'') = \underline{D}_K(\Gamma)/D'$.

Si $D' \neq 0$, on aurait $\Gamma' \neq 0$ et pourtant $\underline{V}_p(\Gamma'') = \underline{V}_p(\Gamma)$, ce qui est absurde. On a donc $D' = 0$ et η_Γ est injective.

Mais on a $\dim_{K_0} D \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}_p(\Gamma)$ avec égalité si et seulement si $\underline{V}_p(\Gamma)$ est cristalline; comme $\dim_{K_0} \underline{D}_K(\Gamma) = \dim_{\mathbf{Q}_p} \underline{V}_p(\Gamma)$, $\underline{V}_p(\Gamma)$ est bien cristalline et η_Γ est un isomorphisme des K_0-espaces vectoriels sous-jacents. Comme c'est un morphisme de modules filtrés qui sont tous deux faiblement admissibles, c'est un isomorphisme de modules filtrés, ce qui démontre le théorème.

6.7. Il reste à démontrer la proposition 6.4. Pour cela, commençons par établir un lemme (sans doute bien connu):

LEMME. *Soit Ω un corps et soit H un groupe d'automorphismes de Ω. Si $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des éléments de Ω tels que* $\det((g_i(\omega_j)_{1 \leq i, j \leq n}) = 0$, *quelque soient $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H$, alors $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont linéairement dépendants sur Ω^H.*

Démonstration. On peut supposer qu'il existe $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} \in H$ tels que $\det((g_i(\omega_j)_{1 \leq i, j \leq n-1}) \neq 0$ (sinon, on recommence avec $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$). On peut aussi supposer $\omega_n \neq 0$.

La première hypothèse implique l'existence d'un $(n-1)$-tuple $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ d'éléments de Ω, uniquement déterminés tels que

$$\sum_{j=1}^{n-1} g_i(\omega_j) a_j = g_i(\omega_n), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

La deuxième, jointe à celle du lemme, implique que, pour tout $g_n \in G$, la dernière colonne de la matrice des $g_i(\omega_j)$, pour $1 \leq i, j \leq n$, est une combinaison linéaire des autres, i.e., qu'il existe $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in \Omega$, tels que

$$g_i(\omega_n) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \cdot g_i(\omega_j), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

On a donc nécessairement $b_j = a_j$, pour tout j, ce qui montre que

$$g(\omega_n) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot g(\omega_j), \quad \text{pour tout } g \in H.$$

Pour tout $h \in H$, on a donc aussi

$$h(g(\omega_n)) = \sum_{j=1}^{n-1} h(a_j) \cdot h(g(\omega_j)),$$

ou encore, en changeant hg en g,

$$g(\omega_n) = \sum_{j=1}^{n-1} h(a_j) \cdot g(\omega_j).$$

D'après l'unicité des a_j, on a $h(a_j) = a_j$, pour tout $h \in H$, donc $a_j \in \Omega^H$, d'où le lemme.

6.8. *Montrons maintenant la proposition* 6.5. Supposons que $t_H(D) > t_N(D) = r$. Soit $\beta \in B$ vérifiant $F\beta = p^r\beta$ et $\beta \in B_{\mathrm{DR}}^r$. Si on choisit un élément non nul $t \in T$, et si on pose $\beta = t^r\beta'$, on voit que $F\beta' = \beta'$ et que $\beta' \in B_{\mathrm{DR}}^0$, donc que $\beta' \in \mathbf{Q}_p$, donc que $\beta \in T^r$. Comme $T^r \cap B_{\mathrm{DR}}^{r+1} = 0$, on voit que, si $n = \dim_{K_0} D$, on a $\mathrm{Hom}_{MF_K}(\bigwedge^n D, B) = 0$. Pour tout $g \in G$, soit ν_g: $D \to B$ l'application définie par $\nu_g(d) = g(d)$. C'est un morphisme de modules filtrés et, si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des éléments quelconques de G,

$$\nu_{g_1} \wedge \nu_{g_2} \wedge \cdots \wedge \nu_{g_n}\colon \bigwedge^n D \to B$$

doit être nulle. Autrement dit, si $d_1, d_2, \ldots, d_n$ est une base de D sur K_0, on doit avoir $\det(g_i(d_j)_{1 \leq i, j \leq n}) = 0$, quelque soient les éléments $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de G. En appliquant le lemme précédent à $\Omega = B_{\mathrm{DR}}$, on en déduit que les d_j doivent être linéairement dépendants sur $B_{\mathrm{DR}}^G = K$, ce qui contredit le fait que l'application canonique de $B_K = K \otimes_{K_0} B$ dans B_{DR} est injective.

6.9. *Remarques*. a) Soit Γ un groupe p-divisible sur A. Comme $\underline{V}_p(\Gamma)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}_K}(\underline{D}_K(\Gamma), BW(R))$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}\big(\underline{V}_p(\Gamma), BW(R)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}\big(\underline{V}_p(\Gamma), B\big)$$

et $\underline{D}_K(\Gamma)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(\underline{V}_p(\Gamma)\ BW(R))$. C'est le résultat annoncé dans [Fo1], rem. 2 de la page 237.

b) Si Γ est un groupe p-divisible sur A, on voit que $\underline{D}_K^1(\Gamma)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, CT)$ et $\mathrm{gr}^0\underline{D}_K(\Gamma)$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, C)$. On retrouve ainsi, mais par une méthode considérablement plus compliquée, le résultat de Tate ([T1]) qui dit que $\underline{V}_p(\Gamma)$ est de Hodge-Tate avec

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, CT^i) = \begin{cases} \operatorname{codim}\Gamma = ht(\Gamma) - \dim\Gamma, & \text{si } i = 0, \\ \dim\Gamma, & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \neq 0, 1. \end{cases}$$

Appendice. Quelques conjectures sur la cohomologie des variétés algébriques sur les corps locaux

A.1. Pour toute variété propre non singulière X sur K, et pour tout $i \in \mathbf{N}$, posons $H_{\text{ét}}^i(X) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim H_{\text{ét}}^i(X \times \overline{K}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$.

Rappelons que l'on peut considérer $H_{\text{ét}}^*$ comme un foncteur contravariant de la catégorie des variétés propres non singulières sur K dans celle des $\mathbf{Q}_p$-algèbres graduées, de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, avec action continue de G, compatible avec la structure de $\mathbf{Q}_p$-algèbre graduée. En particulier, la multiplication induit, pour tout X, tout i, tout j, une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire, commutant à l'action de G,

$$m_{X,\text{ét}}^{ij} \colon H_{\text{ét}}^i(X) \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^j(X) \to H_{\text{ét}}^{i+j}(X).$$

Si V est une représentation p-adique, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, posons $V(i) = T^i \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Soit n la dimension de la variété X. Rappelons aussi (cf., par exemple, [T2]) que, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq n$, si $C^i(X)$ désigne le groupe des cycles (rationnels sur K), on dispose d'une application cycle

$$\gamma_{X,\text{ét}}^i \colon C^i(X) \to \big(H_{\text{ét}}^{2i}(X)(i)\big)^G.$$

A.2. Pour toute variété propre non singulière X sur K, et pour tout $i \in \mathbf{N}$, soit $H_{\mathrm{Hodge}}^i(X)$ le K-espace vectoriel gradué

$$H_{\mathrm{Hodge}}^i(X) = \bigoplus_{j=0}^{i} \mathrm{gr}^j H_{\mathrm{Hodge}}^i(X), \quad \text{avec } \mathrm{gr}^j H_{\mathrm{Hodge}}^i(X) = H^{i-j}\big(X, \Omega_X^j\big).$$

Rappelons que l'on peut considérer H^*_{Hodge} comme un foncteur contravariant de la catégorie des variétés propres non singulières sur K dans celle des K-algèbres "bigraduées", de dimension finie sur K. En particulier, la multiplication induit, pour tout X, tout i, tout j, un morphisme de K-espaces vectoriels gradués

$$m^{ij}_{X,\mathrm{Hodge}}\colon H^i_{\mathrm{Hodge}}(X) \otimes H^j_{\mathrm{Hodge}}(X) \to H^{i+j}_{\mathrm{Hodge}}(X).$$

Rappelons aussi que, si X est de dimension n, on dispose, pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq n$, d'une application cycle

$$\gamma^i_{X,\mathrm{Hodge}}\colon C^i(X) \to H^i(X, \Omega^i_X) = \mathrm{gr}^i H^{2i}_{\mathrm{Hodge}}(X).$$

A.3. Les deux premières parties de la conjecture suivante ne font que préciser une conjecture bien connue de Tate ([Se5], p. 58):

CONJECTURE C_{HT}. 1) *La cohomologie étale p-adique est de Hodge-Tate.*

2) *Il existe une $\otimes$-équivalence naturelle λ entre les foncteurs $D_{\mathrm{HT}}(H^*_{\text{ét}}(\ ))$ et $H^*{}_{\mathrm{Hodge}}(\ )$.*

3) *On peut choisir λ compatible aux applications cycles.*

Autrement dit, de façon explicite:

—L'assertion (1) signifie que, pour toute variété propre non singulière X sur K et pour tout $i \in \mathbf{N}$, $H^i_{\text{ét}}(X)$ est une représentation p-adique de Hodge-Tate.

—L'assertion (2) signifie qu'il existe, pour toute variété propre non singulière X sur K et pour tout $i \in \mathbf{N}$, un isomorphisme de K-espaces vectoriels gradués

$$\lambda^i_X\colon \underline{D}_{\mathrm{HT}}(H^i_{\text{ét}}(X)) \to H^i_{\mathrm{Hodge}}(X),$$

fonctoriel en X, tel que, pour tout X, tout i, tout j, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{D}_{\mathrm{HT}}(H^i_{\text{ét}}(X) \otimes H^j_{\text{ét}}(X)) \arrow[rr, "\underline{D}_{\mathrm{HT}}(m^{ij}_{X,\text{ét}})"] \arrow[d, "\text{iso. can.}"'] & & \underline{D}_{\mathrm{HT}}(H^{i+j}_{\text{ét}}(X)) \arrow[dd, "\lambda^{i+j}_X"] \\
\underline{D}_{\mathrm{HT}}(H^i_{\text{ét}}(X)) \otimes \underline{D}_{\mathrm{HT}}(H^j_{\text{ét}}(X)) \arrow[d, "\lambda^i_X \otimes \lambda^j_X"'] & & \\
H^i_{\mathrm{Hodge}}(X) \otimes H^j_{\mathrm{Hodge}}(X) \arrow[rr, "m^{ij}_{X,\mathrm{Hodge}}"] & & H^{i+j}_{\mathrm{Hodge}}(X)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

—Pour l'assertion (3), commençons par remarquer que, si V est une représentation p-adique et si $i \in \mathbf{Z}$, $V(i) = T^i \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est contenu dans

$\mathrm{gr}^i B_{\mathrm{DR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, donc que $(V(i))^G$ s'identifie à un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathrm{gr}^i \underline{D}_{\mathrm{DR}}(V)$.

L'assertion (3) signifie alors que l'on peut choisir λ tel que, si X est de dimension n et si $0 \leq i \leq n$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \left(H^{2i}_{\text{ét}}(X)(i)\right)^G \arrow[d, hook] \\ C^i(X) \arrow[ur, "\gamma^i_{X,\text{ét}}"] \arrow[dr, "\gamma^i_{X,\mathrm{Hodge}}"'] & \mathrm{gr}^i \underline{D}_{\mathrm{DR}}\left(H^{2i}_{\text{ét}}(X)\right) \arrow[d, "\text{restr. de } \lambda^{2i}_X"] \\ & H^i\left(X, \Omega^i_X\right) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

A.4. *Remarques*. a) On voit qu'imposer la commutativité du diagramme ci-dessus pour $i = n$ revient à imposer l'application λ^{2n}_X. Si l'on fait un tel choix, λ est aussi compatible aux applications traces: on sait que l'on dispose de deux applications traces

—l'une, en cohomologie étale,

$$t_{X,\text{ét}} \colon H^{2n}_{\text{ét}}(X) \to \mathbf{Q}_p,$$

—l'autre, qui est une application de $H^n(X, \Omega^n_X)$ dans K, peut être considérée comme un morphisme de K-espaces vectoriels gradués

$$t_{X,\mathrm{Hodge}} \colon H^{2n}_{\mathrm{Hodge}}(X) \to K(-n),$$

en notant $K(-n)$ le K-espace vectoriel gradué défini par

$$\mathrm{gr}^i K(-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n, \\ K & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Alors, avec le choix de λ^{2n}_X fait ci-dessus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{D}_{\mathrm{DR}}\left(H^{2n}_{\text{ét}}(X)\right) \arrow[r, "\underline{D}_{\mathrm{DR}}(t_{X,\text{ét}}(-n))"] \arrow[d, "\lambda^{2n}_X"] & \underline{D}_{\mathrm{DR}}\left(\mathbf{Q}_p(-n)\right) \arrow[d, "\text{iso. can.}"] \\ H^{2n}_{\mathrm{Hodge}}(X) \arrow[r, "t_{X,\mathrm{Hodge}}"] & K(-n) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

b) Dans le cas des variétés abéliennes, les assertions (1) et (2) de la conjecture C_{HT} sont un théorème dû à Tate dans le cas de bonne réduction et à Raynaud dans le cas général (cela résulte des travaux de Tate sur les groupes

p-divisibles, cf. [T1], et du théorème de réduction semi-stable, cf. [SGA 7 I]; voir aussi [Fo3] pour une autre démonstration de ce résultat).*

A.5. Pour toute variété propre non singulière X sur K et pour tout $i \in \mathbf{N}$, la filtration de Hodge munit $H^i_{\mathrm{DR}}(X)$, le i-ième groupe d'hypercohomologie de de Rham de X, d'une structure de K-espace vectoriel filtré et le K-espace vectoriel gradué associé s'identifie à $H^i_{\mathrm{Hodge}}(X)$.

On peut considérer H^*_{DR} comme un foncteur contravariant de la catégorie des variétés propres non singulières sur K dans celle des K-algèbres "graduées-filtrées" de dimension finie sur K. En particulier, la multiplication induit, pour tout X, tout i, tout j, un morphisme de K-espaces vectoriels filtrés

$$m^{ij}_{X,\mathrm{DR}}\colon H^i_{\mathrm{DR}}(X) \otimes H^j_{\mathrm{DR}}(X) \to H^{i+j}_{\mathrm{DR}}(X)$$

(et, avec des notations évidentes, $m_{X,\mathrm{Hodge}} = \operatorname{gr} m_{X,\mathrm{DR}}$).

Ici encore, si X est de dimension n, on dispose, pour tout entier i vérifiant $0 \le i \le n$, d'une application cycle

$$\gamma^i_{X,\mathrm{DR}}\colon C^i(X) \to \mathrm{Fil}^i H^{2i}_{\mathrm{DR}}(X)$$

qui, par passage au quotient, induit $\gamma^i_{X,\mathrm{Hodge}}$.

A.6 Conjecture C_{DR}. 1) *La cohomologie étale p-adique est de de Rham.*

2) *Il existe une $\otimes$-équivalence naturelle μ entre les foncteurs $\underline{D}_{\mathrm{DR}}(H^*_{\text{ét}}(\ ))$ et $H^*_{\mathrm{DR}}(\ )$.*

3) *On peut choisir μ compatible aux applications cycles.*

La traduction explicite de cette conjecture se fait comme pour C_{HT}.

A.7. *Remarques.* a) La conjecture C_{DR} implique C_{HT}.

b) Ici encore la propriété (3) implique que μ est compatible, en un sens évident, aux applications traces.

c) L'assertion (1) de C_{DR} est un théorème pour les variétés abéliennes. Il en est de même de (2) pour les variétés abéliennes ayant potentiellement bonne réduction, et il est probable que cette hypothèse sur la réduction peut être supprimée: cf. [F-M].

A.8. Nous disons qu'une variété propre non singulière X sur K a *bonne réduction* s'il existe un schéma propre et lisse $\mathfrak{X}$ sur $\operatorname{Spec} A$ (rappelons que A désigne l'anneau des entiers de K) qui prolonge X, (i.e., tel que $\mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} K = X$). On vérifie que, si X est une variété abélienne, cette définition est équivalente à la définition usuelle.

*Voir note *ajoutée sur epreuves*, p. 577.

Nous nous proposons d'énoncer une conjecture C_{cris}, analogue aux conjectures C_{HT} et C_{DR} qui, dans le cas de bonne réduction, relie la cohomologie étale p-adique et la cohomologie cristalline. Toute fois, pour donner un sens à cette conjecture, on est conduit à admettre certains résultats dont il n'existe pas encore de démonstration publiées:

A.9. Si $\mathcal{X}$ est un schéma propre et lisse sur Spec A, on pose

$$\mathcal{X}_k = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, k \qquad \text{et} \qquad \mathcal{X}_K = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, K.$$

Tout d'abord, un résultat tout récent de Messing ([Me2]) dit que, si X est une variété propre non singulière sur K, ayant bonne réduction, la cohomologie cristalline à valeurs dans $K_0 = \mathrm{Frac}\, W(k)$ de la fibre spéciale d'un prolongement propre et lisse de X sur Spec A ne dépend que de X. De façon précise, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ sont deux schémas propres et lisses sur Spec A tels que $\mathcal{X}_K = \mathcal{X}'_K$, Messing construit, pour tout $i \in \mathbf{N}$, un isomorphisme canonique (de K_0-espaces vectoriels avec action de F)

$$K_0 \otimes_{W(k)} H^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k, W(k)) \xrightarrow{\sim} K_0 \otimes_{W(k)} H^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}'_k, W(k))$$

fonctoriel et compatible avec la structure multiplicative.

Nous nous en servons pour poser $H^i_{\mathrm{cris}}(X) = K_0 \otimes_{W(k)} H^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k, W(k))$, $\mathcal{X}$ étant un prolongement propre et lisse quelconque de X sur Spec A.

A.10. Ensuite un résultat de la thèse de Berthelot ([Be]) dans le cas peu ramifié (i.e., où l'indice de ramification absolu e de K est $\leq p - 1$) étendu à e arbitraire par Deligne pour les schémas abéliens puis, récemment par Ogus ([Mel]) pour le cas général, dit que, si $\mathcal{X}$ est un schéma propre et lisse sur Spec A, il existe, pour tout $i \in \mathbf{N}$, un isomorphisme canonique (de K-espaces vectoriels)

$$K \otimes_{W(k)} H^i_{\mathrm{cris}}(\mathcal{X}_k, W(k)) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}_K)$$

fonctoriel et compatible avec les structures multiplicatives. En outre ([Me2]) les isomorphismes de Messing et de Ogus sont compatibles de manière évidente.

Lorsque X est une variété propre non singulière sur K, ayant bonne réduction, ce qui précède nous permet d'identifier $K \otimes_{K_0} H^i_{\mathrm{cris}}(X)$ et $H^i_{\mathrm{DR}}(X)$. On a donc muni $H^i_{\mathrm{cris}}(X)$ d'une structure de module filtré, i.e., d'objet de la catégorie $\underline{MF}^{\varphi}_K$ (cf. no. 5.1). Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on peut considérer H^i_{cris} comme un foncteur contravariant de la catégorie des variétés propres non singulières sur K, ayant bonne réduction, dans celle des modules filtrés de dimension finie et, pour tout X, tout i, tout j, la multiplication induit un morphisme de modules filtrés

$$m^{ij}_{X,\mathrm{cris}}\colon H^i_{\mathrm{cris}}(X) \otimes H^j_{\mathrm{cris}}(X) \to H^{i+j}_{\mathrm{cris}}(X).$$

A.11 Conjecture C_{cris}. 1) *La cohomologie étale p-adique des variétés propres non singulières sur K, ayant bonne réduction, est cristalline.*

2) *Il existe une* $\otimes$*-équivalence naturelle* ν *entre les foncteurs* $\underline{D}_B(H^*_{\text{ét}}(\ ))$ *et* $H^*_{\text{cris}}(\ )$.

3) *On peut choisir* ν *compatible aux applications cycles.*

Si la signification de (1) et (2) semble clair, il vaut peut-être la peine d'expliquer ce que (3) veut dire.

Pour cela, commençons par remarquer que l'application $a \mapsto 1 \otimes a$ nous permet d'identifier $H^i_{\text{cris}}(X)$ à un sous-K_0-espace vectoriel de $K \otimes_{K_0} H^i_{\text{cris}}(X) = H^i_{\text{DR}}(X)$.

Si X (ayant bonne réduction) est de dimension n, on vérifie que, pour $i = 0, 1, \ldots, n$, l'application

$$\gamma^i_{X,\text{DR}}\colon C^i(X) \to \operatorname{Fil}^i H^{2i}_{\text{DR}}(X)$$

a son image contenue dans $H^{2i}_{\text{cris}}(X)$ et même dans le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $H^{2i}_{\text{cris}}(X)$ formé des x tels que $Fx = p^i x$; ce qui nous permet de considérer $\gamma^i_{X,\text{DR}}$ comme une application

$$\gamma^i_{X,\text{cris}}\colon C^i(X) \to H^{2i}_{\text{cris}}(X)[i]$$

(pour tout module filtré D, on pose $D[i] = \operatorname{Fil}^i D_K \cap \{x \in D \mid Fx = p^i x\}$).

Si V est une représentation p-adique et si $D = \underline{D}_B(V)$, on voit que $(V(i))^G$ s'identifie à $D[i]$. L'assertion (3) signifie que l'on peut choisir ν telle que, pour tout X et tout i, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \left(H^{2i}_{\text{ét}}(X)(i)\right)^G \arrow[d, "\text{iso. can.}"] \\
C^i(X) \arrow[ur, "\gamma^i_{X,\text{ét}}"] \arrow[dr, "\gamma^i_{X,\text{cris}}"'] & \left(\underline{D}_B\left(H^{2i}_{\text{ét}}(X)\right)\right)[i] \arrow[d, "\text{restr. de } \nu^{2i}_X"] \\
 & H^{2i}_{\text{cris}}(X)[i]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

S'il en est ainsi, ν est en outre compatible aux applications traces, en un sens facile à expliciter.

A.12. *Remarques.* a) Disons qu'une variété propre non singulière X sur K a *potentiellement bonne réduction* s'il existe une extension finie K' de K telle que $X \times_K K'$ a bonne réduction. Compte-tenu de ce que l'on sait sur les représentations potentiellement cristallines, i.e., les objets de $\underline{\operatorname{Rep}}^{\text{pot}}_{\text{cris}}(G) = \underline{\operatorname{Rep}}^{\text{pot}}_B(G)$ (cf. no. 5.6 et [Fo2], § 7), le fait que la conjecture C_{cris} soit vraie pour toute extension finie K' de K, avec la possibilité de choisir la $\otimes$-équivalence naturelle ν compatible avec le changement de base par une extension finie, équivaut à la conjecture suivante:

CONJECTURE $C_{\text{cris}}^{\text{pot}}$. 1) *La cohomologie étale p-adique des variétés propres non singulières sur* K, ayant potentiellement bonne réduction, *est potentiellement cristalline.*

2) *Il existe une* $\otimes$*-équivalence naturelle* ν^p *entre les foncteurs* $\underline{E}_B(H_{\text{ét}}^*(\ ))$ *et* $H_{\text{cris}}^{*,\text{pot}}(\ )$.

3) *On peut choisir* ν^p *compatible aux applications cycles.*

(On laisse au lecteur le soin d'expliciter ce que signifie précisément cette conjecture, en particulier ce qu'est l'objet $H_{\text{cris}}^{i,\text{pot}}(X)$ de la catégorie $\underline{MPF}_K$ des modules potentiellement filtrés.)

b) La conjecture C_{cris} implique les conjectures C_{DR} et C_{HT} pour les variétés projectives non singulières ayant bonne réduction. De même, la conjecture $C_{\text{cris}}^{\text{pot}}$ implique les conjectures C_{DR} et C_{HT} pour les variétés projectives non singulières ayant potentiellement bonne réduction.

c) Les assertions (1) et (2) de C_{cris} et $C_{\text{cris}}^{\text{pot}}$ sont des théorèmes pour les variétés abéliennes: cf. [F-M].

A.13. Compte-tenu de l'équivalence entre la catégorie $\underline{\text{Rep}}_{\text{cris}}(G)$ des représentations cristallines et la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ des modules filtrés admissibles (no. 5.2), la conjecture C_{cris} est équivalente à la conjecture suivante:

CONJECTURE C'_{cris}. 1) *Pour toute variété propre non singulière* X *sur* K, *ayant bonne réduction, et pour tout* $i \in \mathbf{N}$, *le module filtré* $H_{\text{cris}}^i(X)$ *est admissible.*

2) *Il existe une* $\otimes$*-équivalence naturelle* ν' *entre les foncteurs* $\underline{V}_B(H_{\text{cris}}^*(\ ))$ *et* $H_{\text{ét}}^*(\ )$.

3) *On peut choisir* ν' *compatible aux applications cycles.*

A.14. *Remarques.* a) Supposons $e = 1$ (i.e., $K = K_0 = \operatorname{Frac} W(k)$). Soit X une variété projective non singulière sur K de dimension $< p$, admettant un prolongement projectif lisse $\mathfrak{X}$ sur $\operatorname{Spec} A$ tel que les $H^i(\mathfrak{X}, \Omega_{\mathfrak{X}}^j)$ soient sans torsion. On déduit facilement ([La2], Prop. 5.2) de résultats de Mazur ([Ma1], [Ma2]) que les $H_{\text{cris}}^i(X)$ sont faiblement admissibles (cf. no. 5.1 et [Fo2], no. 4.14), ce qui, d'après [F-L], implique qu'ils sont admissibles et l'assertion (1) de C'_{cris} est donc vraie pour X. En particulier, on peut associer à X, de façon naturelle, des représentations p-adiques, à savoir les $\underline{V}_B(H_{\text{cris}}^i(X))$; il serait bien surprenant que $\underline{V}_B(H_{\text{cris}}^i(X))$ ne s'identifie pas à $H_{\text{ét}}^i(X)$ (ils ont en tout cas la même dimension sur $\mathbf{Q}_p$).

b) On peut bien sûr énoncer un analogue de la conjecture C'_{cris} pour les variétés ayant seulement potentiellement bonne réduction.

Bibliographie

[Ba] I. BARSOTTI, Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18** (1964), 1–25; **19** (1965), 277–330 et 481–512; **20** (1966), 101–137 et 331–365.

[Be] P. BERTHELOT, *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Mathematics, no. 407, Springer, Berlin, 1974.

[B-O] P. BERTHELOT AND A. OGUS, *Notes on Crystalline Cohomology*, Math. Notes, no. 21, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[Fo1] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, no. 47–48, Société mathématique de France, Paris, 1977.

[Fo2] ______, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, no. 65, Société Math. de France, Paris, 1979, p. 3–80.

[Fo3] ______, Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Inv. Math., *à paraître*.

[F-L] J.-M. FONTAINE ET G. LAFFAILLE, Construction de représentations p-adiques, *à paraître*.

[F-M] J.-M. FONTAINE ET W. MESSING, travail en préparation.

[F-W] J.-M. FONTAINE ET J.-P. WINTENBERGER, Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** (1979), 441–444.

[K] S. L. KLEIMAN, Algebraic Cycles and the Weil Conjectures, in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 359–386.

[La1] G. LAFFAILLE, Construction de groupes p-divisibles: le cas de dimension 1, in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, no. 65, Société Math. de France, Paris, 1979, p. 103–123.

[La2] ______, Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié, Bull. Soc. Math. de France, **108** (1980), 187–206.

[Ma1] B. MAZUR, Frobenius and the Hodge filtration, Bull. A. M. S. **78** (1972), 653–667.

[Ma2] ______, Frobenius and the Hodge filtration (estimates), Ann. of Math. **98** (1973), 58–95.

[Me1] W. MESSING, Letter to P. Berthelot, June 4, 1980.

[Me2] ______, Letter to J.-M. Fontaine, August 19, 1980.

[Sa] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Math., no. 265, Springer, Berlin, 1972.

[Sen] S. SEN, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[Se1] J-P. SERRE, *Corps Locaux*, 2° éd., Hermann, Paris, 1968.

[Se2] ______, Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, in *Proc. Conf. on Local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, p. 118–131.

[Se3] ______, *Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves*, Benjamin, New York, 1968.

[Se4] ______, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate, in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, no. 65, Société Math. de France, Paris, 1979, p. 155–187.

[Se5] ______, Résumé des cours 1965–66, in Annuaire du Collège de France, Paris, 1967, p. 49–58.

[SGA 7 I] A. GROTHENDIECK, . . . , *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Mathematics, no. 288, Springer, Berlin, 1972.

[T1] J. Tate, p-Divisible Groups, in *Proc. Conf. on Local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, p. 158–183.
[T2] ______, Algebraic cycles and poles of zeta functions, in *Arithmetical Algebraic Geometry*, Proc. Conf., Purdue University, Harper and Row, New York, 1965, p. 93–110.

(Received December 23, 1980)

Institut Fourier, Université de Grenoble I, Saint Martin d'Hères, France

Ajoutée sur epreuves: Les assertions (1) et (2) de C_{HT} viennent d'être démontrées par Spencer Bloch et Kazuya Kato dans le cas des variétés «ordinaires».