Représentations p-adiques des corps locaux

(1ère partie)

JEAN-MARC FONTAINE

A Alexandre Grothendieck

Table des matières

Introduction

Soient p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 son corps des fractions.

Cet article est la première partie d'un travail consacré à l'étude des représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps complet pour une valuation discrète K à corps résiduel k. On y développe des procédés pour construire toutes ses représentations [du style de ceux qui étaient esquissés dans [Fo83b]; à ceci près que, lorsque l'on rencontre un corps de caractéristique p, complet pour une valuation discrète, on évite de le remplacer par sa clôture radicielle; ceci permet d'introduire des techniques différentielles]; on essaiera ensuite de caractériser les représentations qui nous intéressent plus particulièrement, comme les représentations cristallines, de de Rham, de Hodge-Tate (cf., par.ex. *op.cit.*), semi-stables ([Bu88]) et d'en étudier quelques propriétés.

Pour être plus précis, soient $K^{\text{sép}}$ une clôture séparable de K et $G_K = \mathrm{Gal}(K^{\text{sép}}/K)$. Appelons représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G_K la donnée d'un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G_K.

Il est prévu quatre chapitres:

A. Représentations p-adiques "générales"

On se propose de construire des équivalences entre la catégorie de toutes les représentations p-adiques de G_K et certaines catégories d'objets "purement algébriques."

Afin de décrire quelques-uns des résultats, fixons quelques notations: soient $S = W[[\pi]]$ l'anneau des séries formelles en une variable π à coefficients dans W et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ le séparé complété de $S[1/\pi] = W((\pi))$ pour la topologie p-adique.

(a) Supposons K de caractéristique p et choisissons une identification de l'anneau de ses entiers à S/pS, ainsi qu'un relèvement σ du Frobenius absolu à S (lequel s'étend automatiquement à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$). Si M est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module, notons M_σ le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module déduit de M par l'extension des scalaires $\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. On construit (§A1 et A2) une équivalence entre la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_K et celle des "φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$," i.e., des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-modules de type fini M, munis d'un isomorphisme

$$\Phi : M_\sigma \to M.$$

(b) Supposons maintenant K de caractéristique 0 (et, pour simplifier, $p \neq 2$). Soit K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K contenue dans $\overline{K} = K^{\text{sép}}$. On munit l'anneau S défini ci-dessus d'actions convenablement choisies d'un Frobenius σ et de $\Gamma = \operatorname{Gal}(K_\infty/K) \simeq \mathbb{Z}_p$. (Par exemple, lorsque $K = K_0(\sqrt[p]{1})$, si χ est le caractère cyclotomique, on peut choisir π pour que

$$\sigma(1+\pi) = (1+\pi)^p \text{ et } \gamma(1+\pi) = (1+\pi)^{\chi(\gamma)}).$$

Ces actions s'étendent à $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et on construit (§A3) une équivalence entre la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_K et celle des "φ-Γ-modules étales sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$," i.e., des φ-modules étales sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ munis en outre d'une action semi-linéaire de Γ, commutant à Φ.

[Dans la suite de ce travail, on montrera que l'on peut, dans cette construction, remplacer Γ par $\operatorname{Gal}(L/K)$, où L est une extension galoisienne de K dont le groupe d'inertie est un groupe de Lie p-adique de dimension finie ≥ 1. Cette généralisation semble utile pour différentes questions, notamment pour le calcul des nombres de Tamagawa p-adiques introduits par Bloch et Kato ([BK89]).

C'est d'ailleurs en lisant cet article de Bloch et Kato que j'ai compris l'intérêt qu'il y avait à ne pas remplacer $k((\pi))$ par sa clôture radicielle: si $\mathcal{E}$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, le module $\Omega_{\mathcal{E}/W}$ des formes différentielles continues est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel de dimension 1 et on peut donc "faire du calcul différentiel" (en particulier, le φ-module associé à une représentation p-adique est muni d'une connexion).

Il est clair que ces constructions sont des cas particuliers de constructions beaucoup plus générales. On doit pouvoir remplacer les corps que l'on considère ici par des corps de fonctions de plusieurs variables ou certaines de leurs complétions. En particulier

(i) la loi de réciprocité explicite énoncée au no. 2.4 doit se généraliser et éclairer d'un jour nouveau les travaux de Kato sur ce sujet ([Ka89]);

(ii) ces constructions doivent se faisceautiser et peut être donner une approche nouvelle des théorèmes de comparaison entre cohomologies p-adiques (cf. par exemple, [Fa88a] et [FM87]); on devrait ainsi obtenir des méthodes plus analytiques et comprendre le lien entre ces théorèmes et l'intégration p-adique développée par Coleman ([Co82], [Co85], [Co87]); ces techniques devraient aussi être utiles pour répondre à certaines des questions posées par Faltings dans [Fa88b].]

B. Représentations p-adiques de hauteur finie

(a) Appelons *φ-module p-étale sur S* la donnée d'un S-module de type fini, sans torsion ou avec seulement de la p-torsion, muni d'une application W-linéaire

$$\Phi : M_\sigma \to M,$$

dont le conoyau est annulé par un élément de $S - pS$ convenable.

Soit $q \in S - pS$. Un φ-module p-étale sur S est dit de *q-hauteur finie* si Coker Φ est annulé par une puissance de q.

Dans le cas où le corps K est de caractéristique p, une représentation p-adique de G_K est dite de $q-$hauteur finie si le φ-module étale qui lui est associé provient, par extension des scalaires, d'un φ-module de q-hauteur finie sur S.

Pour pouvoir étudier sérieusement les représentations de q-hauteur finie, on a besoin de connaître quelques propriétés des φ-modules de q-hauteur finie et c'est l'objet du §B1.

(b) Lorsque K est de caractéristique 0, on a une notion de "cr-*hauteur*": dans cet article, on ne définit cette notion que lorsque $e = 1$, i.e., lorsque $K = K_0$. Dans ce cas on peut prendre pour anneau S l'anneau $W[[\pi_0]]$, avec $\pi_0 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p, a \neq 0}((1+\pi)^{[a]} - 1)$ (où π est comme au (b) ci-dessus, et $[a]$ est le représentant de Teichmüller de a dans $\mathbb{Z}_p$). On pose $q = \pi_0 + p$ et on introduit la catégorie $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_S^+$: un objet de cette catégorie est un φ-module sur S de q-hauteur finie, muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ qui commute à l'action de φ et qui est triviale sur le quotient $M/\pi_0 M$. On dit qu'une représentation p-adique V est de cr-hauteur finie si elle provient, en un sens évident, d'un objet M de cette catégorie (la cr-hauteur de V est définie, en gros, comme le plus petit entier r tel que q^r annule $M/\Phi(M_\sigma)$).

Dans le paragraphe B2, on se contente d'étudier quelques propriétés de la catégorie $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_S^+$, qui nous serons utiles dans la suite de ce travail.

L'intérêt de cette notion de cr-hauteur, c'est qu'une représentation de cr-hauteur finie $\leq r$ est une représentation cristalline (cf. [Fo83b]) à poids de Hodge-Tate $\in [-r, 0]$ (du moins lorsque la représentation est sans p-torsion; si, au contraire, elle est de p-torsion, alors c'est un sous-quotient d'une telle représentation).

Il me semble (et cela n'a pas l'air vraiment difficile) que, réciproquement, toute représentation cristalline, à poids de Hodge-Tate ≤ 0 est de cr-hauteur finie. Ces questions, ainsi que la description à partir d'un objet de $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_S^+$ du φ-module filtré assoocié à la représentat ion cristalline correspondantes sont rapidement discutées à la fin du §B2 qui termine cet article.

[Dans la suite de ce travail, on commencera par étudier plus en détail cette correspondance entre représentations de cr-hauteur finie et représentations cristallines, y compris lorsque $e > 1$. On étudiera aussi quelques propriétés de ces représentations; en particulier, on montrera qu'elles ne sont pas trop ramifiées, généralisant ainsi des résultats d'Abraskin

([Ab89]).

On prévoit d'aborder ensuite, dans un chapitre C, le problème de la *"classification" des représentations p-adiques.* Lorsque K est de caractéristique 0, l'objectif est, si V est une représentation p-adique de G_K de décrire en termes de son φ-Γ-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'endomorphisme qui lui est associé par la théorie de Sen ([Se80]), en particulier de savoir reconnaître les représentations de Hodge-Tate; il est aussi de caractériser les représentations de de Rham et les représentations semi-stables. On remarque que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est le complété, pour la topologie p-adique, de $S[1/q]$; très grossièrement, l'idée est que, si M est le φ-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ associé à une représentation V, lorsque l'on écrit la matrice de $\Phi : M_\sigma \to M$, par rapport à des bases convenables, plus la représentation est "méchante," plus les dénominateurs de ses coefficients sont méchants. Les premiers résultats obtenus rendent plausibles l'existence d'un analogue p-adique du théorème de monodromie ℓ-adique de Grothendieck (i.e., il est possible que toute représentation de de Rham soit "potentiellement semi-stable").

Enfin, on espère étudier, dans un chapitre D, *les familles de représentations p-adiques*, à l'aide des φ-Γ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Mais il est pour le moins prématuré d'en parler!]

Une partie de cet article a été écrite pendant un séjour au Max Planck Institüt für Mathematik que je voudrais remercier pour son hospitalité. Je voudrais remercier aussie S. Bloch and K. Kato pour les idées que m'ont données la lecture de leur preprint ([BK89], ainsi que B. Perrin-Riou et J. -P. Wintenberger pour de nombreuses discussions, et que le responsable de cette publication pour ses encouragements et sa patience infinie.

Au congrès de Nice en 1970, Alexandre Grothendieck avait évoqué l'existence du "foncteur mystérieux" reliant cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline. Je voudrais dire ici quel plaisir cela a été pour moi de travailler sur ce sujet et sur ses développements.

Conventions

Dans tout ce travail p est un nombre premier fixé.

0.1. Pour tout groupe profini G, on appelle *représentation* $\mathbb{Q}_p$*-adique* (resp. $\mathbb{Z}_p$*-adique*, resp. *de p-torsion*, resp. *modulo p*) de G la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie (resp. d'un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, resp. d'un $\mathbb{Z}_p$-module de longueur finie, resp. d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie) V muni d'un homomorphisme continu de G dans le groupe des automorphismes de V.

Les représentations $\mathbb{Q}_p$-adiques (resp. $\mathbb{Z}_p$-adiques, de p-torsion, modulo p) de G forment, de manière évidente une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire (resp. $\mathbb{Z}_p$-linéaire, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, $\mathbb{F}_p$-linéaire) que l'on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$, $\mathbf{Rep}_{\,p-\mathrm{tor}}(G)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G)$).

Pour éviter de s'enliser dans les généralités, trivialités, banalités que l'on peut développer autour de ses définitions, on se contentera de dire que les opérations usuelles de l'algèbre linéaire font de ces catégories des catégories tannakiennes neutres ([Sa72], [DM82]) et de rappeler que le foncteur

$$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G),$$

qui à V associe $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$, est essentiellement surjectif (si U est une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique et si V_0 est un réseau de U, alors $V = \sum_{g \in G} g(V_0)$ est encore un réseau de U; c'est donc un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ et $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ s'identifie à U).

0.2. Si $\mathcal{F}$ est un corps valué, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ l'anneau de ses entiers (i.e., le sous-anneau de $\mathcal{F}$ formé des éléments de valuation ≥ 0).

Si A est un anneau de caractéristique p, on note indifféremment φ ou σ le Frobenius absolu ($x \mapsto x^p$).

Si A est un anneau commutatif quelconque, on note $W(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n. Si $a \in A$, on note $[a] \in W(A)$ son représentant de Teichmüller.

A. Représentations p-adiques "générales"

A1. *Représentations p-adiques des corps de caractérestique p*

1.1. *Les φ-modules.* Dans tout ce numéro, (A, σ) est un couple formé d'un anneau commutatif A et d'un endomorphisme σ de A.

1.1.1. Pour tout A-module M, on note M_σ le A-module $A_\sigma \otimes_A M$ déduit de M par l'extension des scalaires σ.

On appelle *φ-module sur* (A, σ) (ou, s'il n'y a pas de risque de confusion, *φ-module sur* A, ou même *φ-module*) la donnée d'un A-module M muni d'une application

$$\varphi : M \to M$$

σ-semi-linéaire (i.e., additive et telle que $\varphi(\lambda x) = \sigma\lambda.\varphi x$).

Se donner φ revient à se donner une application linéaire

$$\Phi : M_\sigma \to M;$$

il suffit de poser $\Phi(\lambda \otimes x) = \lambda.\varphi x$.

Un morphisme $\eta : M \to N$ de φ-modules est une application A-linéaire qui commute à φ.

Les φ-modules sur A forment ainsi une catégorie que l'on note $\boldsymbol{\Phi M}_{A,\sigma}$, ou $\boldsymbol{\Phi M}_A$, voire $\boldsymbol{\Phi M}$, s'il n'y a pas de risque de confusion.

1.1.2. On note $A_\sigma[\varphi]$ l'anneau (non commutatif si $\sigma \neq \mathrm{id}_A$) engendré par A et un élément φ soumis aux relations

$$\varphi.\lambda = \sigma(\lambda).\varphi, \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in A.$$

On note aussi A^σ le sous-anneau de A formé des a tels que $\sigma a = a$. Il est contenu dans le centre de $A_\sigma[\varphi]$ (et égal à ce centre si et seulement si $\sigma^m \neq \mathrm{id}_A$, pour tout entier $m > 0$).

Il est clair que la catégorie $\boldsymbol{\Phi M}_A$ s'identifie à la catégorie des $A_\sigma[\varphi]$-modules à gauche. En particulier, elle est abélienne et A^σ- linéaire.

1.1.3. La catégorie $\boldsymbol{\Phi M}_A$ est munie d'un produit tensoriel: si M et N sont deux objets de $\boldsymbol{\Phi M}_A$, le A-module sous-jacent à $M \otimes N$ est $M \otimes_A N$ et $\varphi(x \otimes y) = \varphi x \otimes \varphi y$.

Ce produit tensoriel satisfait les propriétés usuelles d'associativité et de commutativité.

On dispose aussi d'un "objet-unité": c'est A lui-même avec $\varphi = \sigma$; on voit que $M \otimes A$ et $A \otimes M$ s'identifient à M quelque soit l'objet M de $\boldsymbol{\Phi M}_A$.

Dans toute la suite, *l'endomorphisme σ de A sera noté indifféremment σ ou φ.*

1.1.4. Lorsque l'anneau A est noethérien, on dit qu'un φ-module M est *étale* si le A-module sous-jacent est de type fini et si Φ est bijective (lorsque σ est un automorphisme, il revient au même de demander que φ soit bijective) et on note $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{A,\sigma}$ ou $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_A$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{\Phi M}_A$ dont les objets sont les φ-modules étales.

1.1.5. **Proposition**. *Supposons A noethérien et σ-plat. Alors*

(i) *la catégorie $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_A$ est abélienne;*

(ii) *si $\eta : M \to L$ est un morphisme de $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_A$, le noyau et le conoyau de η dans la catégorie $\boldsymbol{\Phi M}_A$ sont encore étales.*

Preuve. Il est clair que la deuxième assertion implique la première. Montrons donc la seconde: Soit K (resp. N) le conoyau (resp. le noyau) de l'application linéaire sous-jacente. Alors K_σ s'identifie au conoyau de $M_\sigma \to L_\sigma$ et, grâce à la platitude, N_σ s'identifie au noyau. Dans le diagramme comutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & L_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & K_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & L \arrow[r] & K \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

les lignes sont donc exactes. Comme les deux flèches verticales du milieu sont des isomorphismes, il en est de même des deux autres.

1.1.6. **Proposition**. *Supposons A noethérien et σ-plat, intègre et de dimension ≤ 1. Supposons en outre que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'idéal de A engendré par les σx, pour $x \in \mathfrak{m}$, est encore maximal. Alors,*

(i) *pour qu'un φ-module N sur A, de type fini sur A, soit étale, il faut et il suffit que $\Phi : N_\sigma \to N$ soit surjective;*

(ii) *si*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte courte de φ-modules sur A, M est étale si et seulement si M' et M'' le sont.

Preuve. Montrons (i). Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Si $N' = N_{\text{tor}}$ et $N'' = N/N'$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N'_\sigma & \longrightarrow & N_\sigma & \longrightarrow & N''_\sigma & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Si F est le corps des fractions de A, l'application, qui à $x \in N''$ associe $1 \otimes x \in F \otimes_A N'' = N''_F$ est injective et $(N''_F)_\sigma$ est un F-espace vectoriel, de dimension finie égale à celle de N''_F, qui s'identifie à $F \otimes_A N''_\sigma$. Si $\Phi : N_\sigma \to N$ est surjective, il en est de même de $N''_\sigma \to N''$, donc aussi de $(N''_F)_\sigma \to N''_F$, qui est donc bijective. Comme N''_σ s'injecte dans $(N''_F)_\sigma$, l'application $N''_\sigma \to N''$ est bijective. Par conséquent $N'_\sigma \to N'$ est aussi surjective. On voit, par dévissage, que l'hypothèse faite sur A implique que N' et N'_σ sont des A-modules de même longueur finie, et $N'_\sigma \to N'$ est bijective. Finalement $\Phi : N_\sigma \to N$ est bien bijective.

Montrons (ii). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_\sigma & \longrightarrow & M_\sigma & \longrightarrow & M''_\sigma & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donc les lignes sont exactes. Si M' et M'' sont étales, les deux flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes et il en est de même de celle du milieu. Inversement, si M est étale, la flèche verticale de droite est surjective; d'après (i), M'' est étale et la flèche du milieu et celle de droite sont des isomorphismes, donc aussi celle de gauche.

1.1.7. Supposons encore A noethérien et σ-plat. Alors $\boldsymbol{\Phi M}_A^{\text{ét}}$ est une $\otimes$-catégorie (cf. [Sa72]). Autrement dit,

– comme sous-catégorie de $\boldsymbol{\Phi M}_A$, elle est stable par produit tensoriel et contient l'objet-unité;

– elle admet un *hom interne*: si M et N sont deux objets de $\boldsymbol{\Phi M}_A^{\text{ét}}$, le A-module sous-jacent à $Hom(M,N)$ est $L = \mathcal{L}_A(M,N)$; l'homomorphisme canonique $L_\sigma = A \otimes_A L \to \mathcal{L}_A(M_\sigma, N_\sigma)$ est un isomorphisme (Bourbaki, *Alg. Com.*, chap. 1, §2, prop. 11); on peut donc identifier ces deux modules et définir

$$\Phi : L_\sigma \to L$$

par $(\Phi f)(x) = \Phi(f(\Phi^{-1}(x)))$, qui est bien bijective (son inverse Ψ est définie par $(\Psi g)(y) = \Phi^{-1}(g(\Phi y)))$.

Ces opérations vérifient les "propriétés usuelles."

1.1.8. Soient A_1 et A_2 deux anneaux commutatifs munis d'un endomorphisme σ et $\alpha : A_1 \to A_2$ un homomorphisme commutant à σ. Pour tout φ-module M sur A_1, le A_2-module $\alpha^*(M) = A_2 \otimes_{A_1} M$ a une structure naturelle de φ-module sur A_2. On obtient ainsi un foncteur additif

$$\alpha^* : \boldsymbol{\Phi M}_{A_1} \to \boldsymbol{\Phi M}_{A_2}.$$

Si A_1 et A_2 sont noethériens et σ-plats, α^* transforme φ-module étale en φ-module étale.

1.2. *Représentations p-adiques et φ-modules.* Dans la suite de ce paragraphe, E est un corps de caractéristique p et E^{rad} est la clôture radicielle de E. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$E^{(n)} = \left\{ x \in E^{\text{rad}} | x^{p^n} \in E \right\} \quad \text{et} \quad E' = E^{(1)}.$$

On suppose (ce n'est pas essentiel) que E'/E est une extension finie.

On choisit une clôture séparable $E^{\text{sép}}$ de E et on pose $G_E = \text{Gal}(E^{\text{sép}}/E)$. On se propose d'expliciter différentes variantes de la classification des représentations p-adiques de G_E en termes de φ-modules.

1.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique 0, absolument non ramifié (i.e., tel que p engendre l'idéal maximal de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$), de corps résiduel E. Soient $\mathcal{E}_{\text{nr}}$ une extension algébrique non ramifiée de $\mathcal{E}$ dont le corps résiduel est séparablement clos (on peut prendre pour $\mathcal{E}$ le corps des fractions de l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ dans une clôture algébrique de $\mathcal{E}$) et $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}$ le complété de $\mathcal{E}_{\text{nr}}$. On choisit une E-identification du corps résiduel de $\mathcal{E}_{\text{nr}}$ avec $E^{\text{sép}}$. Alors G_E s'identifie à $\text{Gal}(\mathcal{E}_{\text{nr}}/\mathcal{E})$ et opère par continuité sur $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}$.

1.2.2. Si V est une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G_E, on pose

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V\right)^{G_E}.$$

On peut considérer $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$ comme un foncteur covariant additif (c'est même un $\otimes$-foncteur) de la catégorie des représentations p-adiques dans celle des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-modules.

1.2.3. *Remarque.* La notation $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$ traduit le fait que ce foncteur ne dépend pas, à isomorphisme unique près, du choix du couple formé de $\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}$ et d'une identification de G_E à $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}/\mathcal{E})$.

1.2.4. **Proposition.** *Conservons les hypothèses et notations qui précèdent.*

(i) *Pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V de G_E, l'application naturelle*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$$

est un isomorphisme et $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de type fini qui a les mêmes facteurs invariants que V;

(ii) *le foncteur $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$ est exact et fidèle.*

Preuve. Pour les représentations modulo p, cela résulte formellement de ce que $H^0(G_E, E^{\mathrm{sép}}) = E$ et $H^1(G_E, GL_n(E^{\mathrm{sép}})) = \{1\}$ ([Se68], chap. X, prop. 3). Le cas des représentations de p-torsion s'en déduit par dévissage et le cas général par passage à la limite.

1.2.5. Supposons maintenant l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ muni d'un endomorphisme de Frobenius, i.e., d'un endomorphisme

$$\sigma(\text{ou } \varphi) : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$$

vérifiant $\sigma x \equiv x^p \pmod p$. On note encore φ son unique extension à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}$ ainsi que son extension par continuité à $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}$.

L'unicité du prolongement de σ implique que φ commute à l'action de G_E et, pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V, $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$ a une structure naturelle de φ-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

1.2.6. **Proposition.** *Conservons les hypothèses et notations qui précèdent.*

(i) *Pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V de G_E, $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$ est étale;*

(ii) *le foncteur*

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}} : \ \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_E) \to \boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$$

induit une $\otimes$-équivalence de catégories;

(iii) *le foncteur $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}$, qui, au φ-module étale M, associe*

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(M) = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M\right)_{\varphi=1}$$

est un quasi-inverse de $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$.

Preuve. Observons d'abord que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est noethérien et que $\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est fini et plat (si $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ désignent des éléments de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ relevant une base de E sur $E^{(-1)}$, alors $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un module libre sur $\sigma(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ de base les e_i).

La démonstration se ramène alors à vérifier que pour tout φ-module étale M, l'application naturelle

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M$$

est un isomorphisme.

Le cas où M est tué par p est bien connu et peut se voir ainsi: si $(u_j)_{1\leq j\leq d}$ est une base du dual M^* de M, on peut écrire

$$\varphi u_j = \sum_{1\leq \ell\leq d} a_{j,\ell} u_\ell,$$

où la matrice des $a_{j,\ell}$ est une matrice, à coefficients dans E, inversible.

Alors $V = \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(M)$ s'identifie au $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel des applications E-linéaires de M^* dans $E^{\text{sép}}$ qui commutent à φ, ou encore au sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de $(E^{\text{sép}})^d$ formé des $(x_j)_{1\leq j\leq d}$ vérifiant

$$x_j^p = \sum a_{j,\ell} x_\ell .$$

Autrement dit, si $A = E[X_1, X_2, \ldots, X_d]/(X_j^p - \sum a_{j,\ell} X_\ell)_{1\leq j\leq d}$,

$$V = \operatorname{Hom}_{E-\text{algèbres}}\left(A, E^{\text{sép}}\right).$$

Comme A est une E-algèbre étale de rang p^d, V a p^d éléments et est donc un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $d = \dim_E M$.

L'application $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(M) \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M$ se réduit à

$$E^{\text{sép}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \to \mathcal{L}_E\left(M^*, E^{\text{sép}}\right).$$

Comme ces deux $E^{\text{sép}}$-espaces vectoriels ont la même dimension, il suffit de prouver que cette application est injective, ou encore que toute famille d'applications linéaires de M^* dans $E^{\text{sép}}$ qui commutent à φ et sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{F}_p$ restent linéairement indépendantes sur $E^{\text{sép}}$. Sinon, il existerait un entier $r \geq 2$ tel que ce soit vrai pour toute famille ayant strictement moins de r éléments, et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r \in V$, linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_p$, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in E^{\text{sép}}$ tous différents de 0 tels que $\sum x_i \eta_i = 0$. Quitte à diviser par x_1, on peut supposer $x_1 = 1$; en appliquant φ, on trouve que l'on a aussi $\sum x_i^p \eta_i = 0$; en retranchant ces deux égalités, on trouve une relation de dépendance entre moins de r éléments de V, donc $x_i^p = x_i$, pour tout i et les $x_i \in \mathbb{F}_p$, d'où une contradiction.

Le cas où M est de p-torsion s'en déduit par dévissage et *le cas général* par passage à la limite.

1.2.7. *Remarques.* (a) La proposition ci-dessus a, bien sûr, une version contravariante. A toute représentation de p-torsion V de G_E, on peut associer

$$\boldsymbol{D}^*_{\mathcal{E}}(V) = (\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V))^* = \operatorname{Hom}_{G_E}(V, \mathcal{E}_{\mathrm{nr}}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}).$$

On obtient ainsi un foncteur contravariant additif de la catégorie $\mathbf{Rep}_{p-\mathrm{tor}}(G_E)$ dans la catégorie des φ-modules étales de p-torsion, induisant une anti-équivalence entre ces deux catégories; un foncteur quasi-inverse est fourni par

$$\boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(M) = (\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(M))^* = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(M, \mathcal{E}_{\mathrm{nr}}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}).$$

On peut procéder de même avec les représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques sans p-torsion (en posant

$$\boldsymbol{D}^*_{\mathcal{E}}(V) = \operatorname{Hom}_{G_E}\left(V, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(M) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}\left(M, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}\right)).$$

On peut traiter ces deux types de représentations p-adiques (sans p-torsion et de p-torsion) simultanément via le formalisme de s catégories dérivées).

(b) Ces énoncés impliquent des énoncés analogues pour les représentations $\mathbb{Q}_p$-adiques. Soit $\boldsymbol{\Phi M}^0_{\mathcal{E}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-modules sur $\mathcal{E}$ dont les objets sont les D qui sont de dimension finie en tant que $\mathcal{E}$-espaces vectoriels et qui *sont de pente* 0, i.e., tels qu'il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-réseau de D, stable par φ, qui est étale. C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-modules étales sur $\mathcal{E}$, stable par à peu près tout ce que l'on peut imaginer; en particulier, c'est une catégorie abélienne.

Le foncteur, que l'on note encore $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$, qui à toute représentation p-adique V de G_E associe $(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_E}$, induit une $\otimes$-équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_E)$ et $\boldsymbol{\Phi M}^0_{\mathcal{E}}$ (un quasi-inverse étant fourni par $D \mapsto \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(D) = (\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes D)_{\varphi=1}$). On a également des versions contravariantes

$$\boldsymbol{D}^*_{\mathcal{E}}(V) = \operatorname{Hom}_{G_E}\left(V, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(D) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}\left(D, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}\right).$$

1.3. *Comparaison avec le cas des corps parfaits*

1.3.1. Posons $F = E^{\mathrm{rad}}$ et $\overline{F} = (E^{\mathrm{sép}})^{\mathrm{rad}} = \overline{E}$. Alors F est un corps parfait, $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F tout autant que de E, l'action de G_E s'étend de manière unique à $\overline{F}$, ce qui permet d'identifier G_E à $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

Il existe alors, à isomorphisme unique près, un et un seul corps valué complet $\mathcal{F}$ absolument non ramifié, de corps résiduel F: c'est le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = W(F)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans F. Le corps $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{nr}}$ s'identifie, pour sa part, au corps des fractions de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{nr}}} = W(\overline{F})$. Il y a également unicité de la façon de relever le Frobenius de F à $W(F)$.

Restreinte aux représentations de p-torsion, l'équivalence fournie par $\boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}$ (resp. l'anti-équivalence fournie par $\boldsymbol{D}^*_{\mathcal{F}}$) n'est rien d'autre que la classification habituelle des schémas en groupes finis étales sur F, annulés par une puissance de p via leurs modules de Dieudonné covariants (resp. contravariants) (cf., par exemple, [De72], chap. III, §6).

1.3.2. Le fait d'avoir un Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ nous permet d'*identifier* $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ à un sous-anneau de $W(E)$. En effet, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est sans p-torsion il existe un et seul homomorphisme

$$w : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to W(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$$

tel que, pour tout $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, les composantes fantômes de $w(a)$ soient $(a, \varphi a, \ldots, \varphi^n a, \ldots)$ (cf., par exemple, Bourbaki, *Alg. Comm.* chap. IX, §1, exer. 14). En composant w avec la projection de $W(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ sur $W(E)$ induite par la projection de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sur E, on obtient une application injective de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ dans $W(E)$ qui fournit l'identification cherchée.

De même $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}$ s'identifie à un sous-anneau de $W(E^{\mathrm{sép}})$. Ces identifications sont compatibles entre elles et compatibles aussi avec l'action de φ et de G_E.

Les inclusions $W(E) \subset W(E^{\mathrm{rad}}) = W(F)$ et $W(E^{\mathrm{sép}}) \subset W(\overline{E}) = W(\overline{F})$ donnent alors un sens à l'énoncé suivant:

1.3.3. **Proposition**. *Pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V, l'homomorphisme naturel*

$$W\left(E^{\mathrm{rad}}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Supposons d'abord V tuée par p, et soit $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$ sur F. Lorsque l'on écrit les e_i comme des combinaisons linéaires à coefficients dans $\overline{E}$ d'éléments de V, il n'y a qu'un nombre fini de coefficients qui interviennent et il existe un entier r tel que les $\varphi^r e_i$ appartiennent à l'image de l'application considérée. Comme les $\varphi^r e_i$ forment encore une base de $\boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$, l'application est surjective. Le fait que ce soit un isomorphisme résulte alors de ce que $\dim_E \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) = \dim_F \boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$ $(= \dim_{\mathbb{F}_p} V)$.

La surjectivité dans le cas général résulte de la surjectivité mod p. Lorsque V est de p-torsion, l'injectivité résulte alors de ce que les deux modules considérés ont la même longueur. Le cas général s'en déduit par passage à la limite.

A2. *Le cas des corps locaux de caractéristique p*

Dans tout ce paragraphe, E est un corps de caractéristique p, muni d'une valuation discrète pour laquelle il est complet. On note k son corps résiduel, que l'on suppose parfait. On pose $W = W(k)$ et $K_0 = \operatorname{Frac} W = W[1/p]$.

2.1. *Généralités*

2.1.1. On choisit un corps $\mathcal{E}$ comme au n° 1.2.1 et un relèvement de Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. La proposition 1.2.6 ramène l'étude des représentations p-adiques de G_E à celle des φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

2.1.2. Reprenons les notations du n° 1.3. Le complété $\widehat{\overline{E}}$ de $\overline{E}$ est aussi celui de $E^{\text{sép}}$. Notons $\widehat{F}$ (resp. $\widehat{F}^{\text{al}}$) $\subset \widehat{\overline{E}}$ l'adhérence de F (resp. la fermeture algébrique de $\widehat{F}$).

On a des inclusions

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \subset W\left(E^{\text{sép}}\right) \subset W(\overline{E}) \subset W\left(\widehat{\overline{F}}^{\text{al}}\right) \subset W\left(\widehat{\overline{E}}\right),$$

donnant, lorsque l'on prend les éléments fixes par G_E,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subset W(E) \subset W(F) \subset W\left(\widehat{F}\right) = W\left(\widehat{F}\right).$$

En outre, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. $W(F)$, resp. $W(\widehat{F})$) est l'anneau des entiers d'un corps $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{G}$) complet pour une valuation discrète à corps résiduel de caractéristique p et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ (resp. $W(\overline{E})$, resp. $W(\widehat{F}^{\text{al}})$) est l'anneau des entiers du complété d'une extension maximale non ramifiée de ce corps, le groupe de Galois de cette extenison s'identifiant à G_E.

Le foncteur $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$ (resp. $\boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}$, resp $\boldsymbol{D}_{\mathcal{G}}$) induit donc une équivalence entre la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_E et la catégorie des φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. $W(F)$, resp. $W(\widehat{F})$); le foncteur $\boldsymbol{V}_E$ (resp. $\boldsymbol{V}_{\mathcal{F}}$ resp. $\boldsymbol{V}_{\mathcal{G}}$) est un quasi-inverse. Le résultat suivant est immédiat (cf. prop. 1.3.3):

2.1.3. **Proposition.** (i) *Le foncteur*

$$M \mapsto W(F) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M \quad \left(\text{resp. } M \mapsto W(\widehat{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M\right)$$

induit une équivalence entre la catégorie des φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et celle des φ-modules étales sur $W(F)$ (resp $W(\widehat{F})$).

(ii) *Pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V de G_E, les applications naturelles $W(F) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{F}}(V)$ et $W(\widehat{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) \to \boldsymbol{D}_{\mathcal{G}}(V)$ sont des isomorphismes.*

(iii) *Pour toute représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V, l'inclusion naturelle*

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{G}}(V) = \left(W\left(\widehat{F}^{\mathrm{al}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} V\right)^{G_E} \subset \left(W\left(\widehat{\overline{E}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} V\right)^{G_E}$$

est une égalité.

2.2. *Représentations p-adiques et connexions*

2.2.1. Remarquons que, si l'on choisit $\pi \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ relevant une uniformisante $\tilde{\pi}$ de E, alors $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'identifie au séparé complété pour la topologie p-adique de l'anneau $W((\pi))$ des séries formelles à coefficients dans W. Autrement dit l'application

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \to \sum a_n \pi^n$$

définit une bijection entre l'ensemble des familles indexées par $\mathbb{Z}$ d'éléments de W (resp. de K_0 à dénominateurs bornés) tels que la suite des a_{-m} tende p-adiquement vers 0 lorsque $m \mapsto +\infty$ d'une part et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. $\mathcal{E}$) d'autre part.

Remarquons aussi que choisir un relèvement de Frobenius revient à choisir un relèvement $\sigma\pi$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de $\tilde{\pi}^p$.

2.2.2. On voit que le $\mathcal{E}$-espace vectoriel $\Omega_{\mathcal{E}}$ des K_0-différentielles continues de $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel de dimension un engendré par $d_{\log}(\pi) = \pi^{-1}d\pi$ et le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ des W-différentielles continues de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ s'identifie au sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de $\Omega_{\mathcal{E}}$ engendré par $d_{\log}(\pi)$.

2.2.3. Si $\omega = (\sum a_n \pi^n).d_{\log}(\pi) \in \Omega_{\mathcal{E}}$, on pose $\mathrm{Res}_\pi(\omega) = a_0$. En fait, Res_π est indépendant du choix de π, i.e., d'un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ dont l'image dans E est une uniformisante. Cela peut se voir ainsi: soit π_1 un autre choix. On constate que tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}}$ peut s'écrire $\omega_0 + a_0 d_{\log}(\pi)$, où $a_0 \in K$ et ω_0 est dans l'adhérence de l'image de $d : \mathcal{E} \to \Omega_{\mathcal{E}}$. Comme $\mathrm{Res}_{\pi_1}(\omega_0) = \mathrm{Res}_\pi(\omega_0) = 0$, il suffit de vérifier que $\mathrm{Res}_{\pi_1}(d_{\log}(\pi)) = 1$.

Mais on peut écrire

$$\pi = c\pi_1\eta(1+p\alpha), \quad \text{avec} \quad c \in W^*, \ \ \eta - 1 \in \pi_1.W[\![\pi_1]\!], \ \ \alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}.$$

On a alors $d_{\log}(\pi) = d_{\log}(\pi_1) + \eta^1.d\eta + (1+p\alpha)^{-1}.d(1+p\alpha)$. Il est clair que $\mathrm{Res}_{\pi_1}(\eta^{-1}.d\eta) = 0$; comme $(1+p\alpha)^{-1}.d(1+p\alpha) = d(\log(1+p\alpha)) \in \mathrm{Im}\ d$, son résidu est également nul. D'où le résultat.

Dans la suite, pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}}$, on pose $\mathrm{Res}(\omega) = \mathrm{Res}_\pi(\omega)$. Bien sûr, si $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$, alors $\mathrm{Res}(\omega) \in W$.

2.2.4. Le $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$- module $\Omega_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}}$ des W-différentielles continues de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ et est un $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$-module libre de rang un engendré par $d_{\log}(\pi)$.

Proposition. *Soit V une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G_E et soit $M = \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$.*

(i) *Il existe sur le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module M une et une seu le connexion*

$$\nabla : M \to M \otimes \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$$

par rapport à laquelle φ est horizontale, i.e., *telle que $\nabla \circ \varphi = \varphi \circ \nabla$.*

(ii) *Si V est sans p-torsion, le W-module $W \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ s'identifie au module des "sections horizontales de M au-dessus de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$,"* i.e.,

$$W \otimes V = \left\{ x \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \otimes M | \nabla x = 0 \right\}.$$

Preuve. Il est clair que toute connexion sur M s'étend de manière unique en une connexion sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \otimes M$ et que la connexion étendue commute à φ si et seulement si c'était déjà le cas de la connexion initiale. Mais on a

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M = \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V,$$

et, pour tout $v \in V$, si $\nabla(1 \otimes v) = \omega$, on doit avoir $\varphi\omega = \omega$, d'où $\omega = 0$ (car $\varphi\alpha$ est divisible par p pour tout $\alpha \in \Omega_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}}$, donc $\varphi\omega$ est divisible par p, pour tout $\omega \in M \otimes \Omega_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}}$, qui est séparé pour la topologie p-adique). On doit donc avoir $\nabla(\lambda \otimes v) = v \otimes d\lambda$, quelque soit $\lambda \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$ et $v \in V$, d'où l'assertion (i).

L'assertion (ii) résulte alors immédiatement de ce que le noyau de

$$d : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}} \to \Omega_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}}$$

est W.

2.2.5. *Remarque.* Oublions un instant que l'on a choisi un Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et supposons le corps résiduel fini avec p^r éléments, de sorte que K_0 est une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On voit (en reprenant les arguments développés ci-dessus avec $\tau = \sigma^r$ et $\psi = \varphi^r$ à la place de σ et φ) que l'on a un foncteur additif exact et pleinement fidèle de la catégorie des représentations K_0-linéaires de dimension finie de G_E dans la catégorie des $\mathcal{E}$-espaces vectoriels de dimension finie M, munis d'une connexion

$$\nabla : M \to M \otimes_{\mathcal{E}} \Omega_{\mathcal{E}/K_0}.$$

L'image essentielle consiste en les objets M tels que, si l'on choisit un automorphisme continue τ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ qu i relève σ^r, il existe un Frobenius

$$\Psi : M_\tau \to M$$

de pente 0 qui est horizontal relativement à ∇ (si c'est vrai pour un choix du relèvement de σ^r, c'est vrai pour tous). Les experts devraient reconnaître des objets bien connus, et le rédacteur rougit de son ignorance!

2.3. *L'isomorphisme de Coleman*

2.3.1. Soit $\mathcal{E}' = \varphi^{-1}\mathcal{E}$ (on peut, par exemple, voir $\mathcal{E}'$ comme un sous-corps de $W(E^{\mathrm{rad}})[1/p]$). C'est une extension de degré p de $\mathcal{E}$, et c'est donc encore un corps valué complet, qui reste absolument non ramifié (au sens que p engendre l'idéal maximal de l'anneau des entiers), mais l'extenison $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ n'est pas non ramifiée, car l'extension résiduelle E'/E est purement inséparable.

Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on note $N_\varphi(x)$ (resp. $T_\varphi(x)$) la norme (resp. la trace) de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$ de $\varphi^{-1}x$.

2.3.2. **Proposition**. *Soit $1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E}$ (res p. $(\mathcal{O}_\mathcal{E}^*)_{N_\varphi=1}$) le sous-groupe du groupe $\mathcal{O}_\mathcal{E}^*$ des unités de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ formé des x tels que $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ (resp. $N_\varphi(x) = x$). Alors $\mathcal{O}_\mathcal{E}^*$ est le produit direct de $1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E}$ par $(\mathcal{O}_\mathcal{E}^*)_{N_\varphi=1}$.*

Preuve. Dans la suite exacte

$$0 \to 1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E} \to \mathcal{O}_\mathcal{E}^* \to E^* \to 0,$$

$1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est stable par N_φ qui induit l'identité sur E^*. En prenant les éléments fixes par N_φ, on obtient une suite exact

$$\begin{aligned}(1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E})_{N_\varphi=1} \to (\mathcal{O}_\mathcal{E}^*)_{N_\varphi=1} \to E^* & \\ \to (1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E}) \,/\, (N_\varphi - 1)\,(1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E})\,.\end{aligned}$$

Mais, si $y \in \mathcal{O}_\mathcal{E}$, on a $T_\varphi(y) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ et, pour tout entier $r \geq 1$,

$$N_\varphi\,(1 + p^r y) \equiv 1 + p^r T_\varphi(y) \equiv 1 \pmod{p^{r+1}}\,.$$

On en déduit que $(1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E})_{N_\varphi=1} = (1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E})/(N_\varphi - 1)(1 + p\mathcal{O}_\mathcal{E}) = 0$, donc que

$$(\mathcal{O}_\mathcal{E}^*)_{N_\varphi=1} \to E^*$$

est un isomorphisme, et la proposition en résulte.

2.3.3. On note

$$\mathrm{Col}\ : E^* \to (\mathcal{O}_\mathcal{E}^*)_{N_\varphi=1}$$

l'isomorphisme réciproque. C'est donc l'unique section de la projection de $\mathcal{O}_\mathcal{E}^*$ sur E^* qui vérifie $N_\varphi(\mathrm{Col}(x)) = \mathrm{Col}(x)$, pour tout x. On verra dans la deuxième partie que Col peut être interprété comme une généralisation de l'isomorphisme de Coleman ([Co79], th. A, voir aussi [BK89], th. 2.2). Il joue aussi le rôle de l'homomorphisme de Teichmüller dans ce contexte; on prendra garde toutefois que, si l'on identifie $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ à un sous anneau de $W(E)$ comme au n° 1.3.2, et si, pour tout $x \in E$, on note $[x] \in W(E)$ son représentant de Teichmüller, alors en général $\mathrm{Col}(x) \neq [x]$ (on a cependant l'égalité si $x \in k$).

2.3.4. **Proposition**. *Soit $x \in \mathcal{E}$ et $u \in E^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$Res\,(\varphi^m(x).d_{\log}(Col(u))) = \varphi^m\,(Res\,(x.d_{\log}(Col(u)))) .$$

Preuve. Il suffit de le prouver pour $m = 1$.

Pour toute K_0-algèbre topologique Λ, notons Ω_Λ le Λ-module des K_0-différentielles continues de Λ.

On dispose d'un opérateur "trace"

$$\mathrm{tr}\ \ : \Omega_{\mathcal{E}'} \to \Omega_{\mathcal{E}},$$

que l'on peut définir ainsi: Soient ζ une racine primitive p-ième de 1 appartenant à une extension algébrique de $\mathcal{E}'$ et $C = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}'[\zeta]/\mathcal{E}[\zeta])$. L'application naturelle $\Omega_{\mathcal{E}'} \to \Omega_{\mathcal{E}'[\zeta]}$ est injective et nous permet d'identifier $\Omega_{\mathcal{E}'}$, à un sous-$\mathcal{E}'$-espace vectoriel de $\Omega_{\mathcal{E}'[\zeta]}$. De même $\Omega_{\mathcal{E}}$ s'identifie à un sous-$\mathcal{E}$-espace vectoriel de $\Omega_{\mathcal{E}[\zeta]}$. Pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}'[\zeta]}$, $\mathrm{tr}(\omega) := \sum_{g \in C} g(\omega) \in (\Omega_{\mathcal{E}'[\zeta]})^C = \Omega_{\mathcal{E}[\zeta]}$. It est clair que, si $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}'}$, alors $\mathrm{tr}(\omega) \in \Omega_{\mathcal{E}}$.

On voit que, pour tout $u \in E^*$, $\mathrm{tr}(\varphi^{-1}(d_{\log}\mathrm{Col}(u))) = d_{\log}\mathrm{Col}\,(u)$. Comme, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\omega' \in \Omega_{\mathcal{E}'}$, on a $\mathrm{tr}(x.\omega') = x.\mathrm{tr}(\omega')$, la proposition résulte du lemme suivant:

2.3.5. **Lemme**. *Pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}}$, on a* $\mathrm{Res}(\mathrm{tr}(\varphi^{-1}\omega)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Res}\ \omega)$.

Preuve. L'application φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ qui, en tant qu'homomorphisme de K-algèbre, est σ^{-1}-semi-linéaire. Avec des notations évidentes, on a donc $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\varphi^{-1}\omega) = \varphi^{-1}(\mathrm{Res}_{\mathcal{E}}(\omega))$. Le lemme se déduit donc du résultat suivant:

2.3.6. **Sous-lemme**. (i) *Pour tout $\omega' \in \Omega_{\mathcal{E}'}$, on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{E}}(\mathrm{tr}(\omega')) = \ \mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\omega'));$$

(ii) *pour tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}}$, on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\omega) = p.\mathrm{Res}_{\mathcal{E}}(\omega).$$

2.3.7. **Preuve**. Montrons la deuxième assertion: Soit $\pi' \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$ un relèvement d'une uniformisante du corps résiduel E' de $\mathcal{E}'$ (qui est une extension radicielle de degré p de E). Comme π'^p relève une uniformisante de E, on voit que, si

$$X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_1X + a_0$$

est le polynôme minimal de π' sur $\mathcal{E}$, et si l'on pose $\pi = -a_0$, alors π relève une uniformisante de E et les a_j, pour $1 \leq j \leq p-1$, sont divisibles par p dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}$. On peux donc écrire

$$\pi = \pi'^p.(1+p\alpha), \text{ avec } \alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}'}.$$

Comme tout $\omega \in \Omega_{\mathcal{E}}$ peut s'écrire $\omega = \omega_0 + a_0 d_{\log}\pi$, avec ω_0 dans l'adhérence de l'image de d et $a_0 \in K_0$, et comme la formule est évidente pour ω_0, il suffit de vérifier que $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(d_{\log}\pi) = p$. Mais c'est clair car

$$d_{\log}\pi = p.d_{\log}\pi' + d(\log(1+p\alpha))$$

et le résidu de $d(\log(1+p\alpha))$ est nul.

Montrons alors la première asssertion: pour tout $g \in C$, on a $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(g\omega')$ $=$, $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\omega')$, par conséquent $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{tr}(\omega')) = [\mathcal{E}' : \mathcal{E}].\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\omega') = p.\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\omega')$. Comme on vient de voir que l'on a aussi $\mathrm{Res}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{tr}(\omega')) = p.\mathrm{Res}_{\mathcal{E}}(\mathrm{tr}(\omega'))$, on a bien l'égalité cherchée.

2.4. *Loi de réciprocité explicite*

2.4.1. Soit

$$\delta_{\mathcal{E}} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\left(G_E^{ab}, \mathbf{Z}_p\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\left(G_E, \mathbf{Z}_p\right)$$

l'homomorphisme défini par

$$\delta_{\mathcal{E}}(a)(g) = (g-1)(\alpha),$$

pour $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $g \in G_E^{ab}$ (où α est une solution dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}$, ou dans $W(E^{\text{sép}})$, ou encore dans $W(\overline{E})$, cela revient au même, de $(\varphi-1)(\alpha) = a$).

On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G_E, \mathbf{Z}_p) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p(G_E)}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ et il résulte de l'équivalence entre φ-modules étales et représentations p-adiques (proposition 1.2.6. ci-dessus) que $\delta_{\mathcal{E}}$ est surjective et induit un isomorphisme

$$\bar{\delta}_{\mathcal{E}} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/(\varphi-1)(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\left(G_E^{ab}, \mathbf{Z}_p\right).$$

2.4.2. Supposons maintenant le corps résiduel k de E fini. Pour tout $u \in E^*$, notons $g_u \in G_E^{ab}$ l'élément fourni par l'isomorphisme de réciprocité (cf. par exemple, [Se68], chap. XIII, §4). Si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $u \in E^*$, posons

$$[x, u) = \delta_{\mathcal{E}}(x)(g_u) \in \mathbf{Z}_p.$$

Remarquons enfin que $K_0 =$ Frac W est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et que, pour tout $a \in W$, $\mathrm{Tr}_{K_0/\mathbf{Q}_p}(a) \in \mathbf{Z}_p$.

2.4.3. **Proposition.** *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, si $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $u \in E^*$, on a*

$$[x, u) = \mathit{Tr}_{K_0/\mathbb{Q}_p}\left(\mathit{Res}\left(x.d_{\log}(\mathit{Col}(u))\right)\right).$$

Preuve. On va déduire cette proposition des lois de réciprocité explicites de Witt ([Wi37]): si $z \in W_n(E)$ et si $u \in E^*$, notons $[z, u)_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \subset W_n(E)$ l'élément défini par

$$[z, u)_n = g_u(\xi_n) - \xi_n,$$

où $\xi_n \in W_n(E^{\text{sép}})$ vérifie $\varphi(\xi_n) - \xi_n = z$.

Si l'on pose $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p^n$, on disp ose d'un homomorphisme

$$w_{n-1} : W_n(E) \to \mathcal{O}_{\mathcal{E},n},$$

à savoir celui qui à $(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ associe $\sum_{0 \leq j \leq n-1} p^j.(\hat{z}_j)^{p^{n-1-j}}$, où $\hat{z}_j$ désigne un relèvement quelconque de z_j dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$. Alors (*op. cit.*, Satz 18), si $z \in W_n(E)$ et si $\hat{u}$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ relevant $u \in E^*$, on a

$$[z, u)_n = \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Res}_{\pi}\left(w_{n-1}(z).\hat{u}^{-1}d\hat{u}\right)\right),$$

où Tr (resp. Res_{π}) est l'application induite par réduction mod p^n de $\operatorname{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}$ (resp. Res).

La proposition revient à prouver que, pour tout n, si $x_{<n}$ désigne l'image de $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subset W(E)$ dans $W_n(E)$, on a

$$[x_{<n}, u)_n = \operatorname{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}\left(\operatorname{Res}\left(x.d_{\log}(\operatorname{Col}(u))\right)\right) \bmod p^n.$$

Comme $w_{n-1}(x_{<n})$ n'est autre que la réduction mod p^n de $\varphi^{n-1}(x)$, et comme pour tout $\lambda \in W$, $\operatorname{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\varphi^{n-1}(\lambda)) = \ ,\operatorname{Tr}_{W/\mathbb{Z}_p}(\lambda)$, cela résulte la proposition 2.3.4.

A3. *Le cas des corps locaux de caractéristique* 0

Dans tout ce paragraphe, $\overline{K}$ est une clôture algébrique fixée de K_0. Pour toute extension L de K_0 contenue dans $\overline{K}$, on pose $G_L = \operatorname{Gal}(\overline{K}/L)$.

On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique usuelle (sur lequel G_{K_0} opère par continuité).

3.1. *Le corps* Fr R *et quelques-uns de ses sous-anneaux*

3.1.1. Dans ce numéro, $K_0' = K_0(\sqrt[p]{1})$ et on note $K_\infty \subset \overline{K}$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K_0 si $p \neq 2$ et $K_\infty = \cup K_0(\sqrt[2^n]{1})$ si $p = 2$.

Pour toute extension algébrique L de K_0 contenue dans $\overline{K}$, on pose $H_L = G_L \cap G_{K_\infty}$, $\Gamma_L = G_L/H_L$ (qui est donc un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ si L/K_0 est finie, sauf peut-être si $p = 2$, auquel cas il peut aussi être isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$).

3.1.2. Rappelons la définition de l'anneau R introduit dans [Fo77] (cf., par ex., [Fo83a], n° 3.6). En tant qu'ensemble, R (resp. Fr R) est formé des familles $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_C$ (resp. C) vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On définit sur R l'addition et la multiplication par les formules

$$(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)} \quad \text{et} \quad (x+y)^{(n)} \lim_{m\mapsto\infty} \left(x^{n+m)} + y^{(n+m)}\right)^{p^m} .$$

Cela munit R d'une structure d'anneau. Choisissons un idéal a de $\mathcal{O}_C$ strictement contenu dans l'idéal maximal et contenant p. L'application, qui à $x \in R$ associe la suite des réductions mod a des $x^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définit un isomorphisme canonique

$$R \simeq \lim.\mathrm{proj}._{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{\overline{K}}/a$$

(chaque application de transition étant l'élévation à la puissance p) que nous utilisons pour identifier ces deux anneaux (en particulier cette limite projective ne dépend pas du choix de a; le choix habituel est l'idéal engendré par p).

Soit $\bar{k}$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_C$, qui est donc une clôture algébrique de k. Pour tout $a \in \bar{k}$, on note $[a]$ son représentant de Teichmüller dans $W(\bar{k}) \subset \mathcal{O}_C$. L'application, qui à $a \in \bar{k}$ associe $([a^{p^{-n}}])_{n\in\mathbb{Z}}$, est un homomorphisme d'anneaux et nous permet de considérer R comme une $\bar{k}$-algèbre (donc *a fortiori* comme une k-algèbre).

L'anneau R est un anneau parfait de caractéristique p, intègre, et Fr R s'identifie bien à son corps des fractions.

Si v_p est la valuation de C normalisée par $v_p(p) = 1$, on pose $v(x) = v_p(x^{(0)})$, pour tout $x \in$ Fr R. L'application v est une valuation de Fr R, qui est complet, son anneau des entiers est R et son corps résiduel est $\bar{k}$.

Le groupe G_{K_0} opère par fonctorialité sur Fr R.

3.1.3. On choisit un générateur du "$\mathbb{Z}_p(1)$ multiplicatif," i.e., un élément $\epsilon = (\epsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ tel que $\epsilon^{(0)} = 1$ et $\epsilon^{(1)} \neq 1$. C'est un élément du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des unités de l'anneau R congrues á 1 modulo son idéal maximal.

On pose alors

$$\tilde{\pi}_0 = \sum_{a\in\mathbb{F}_p} \epsilon^{[a]}$$

(où, rappelons-le, $[a] \in \mathbb{Z}_p$ est le représentant de Teichmüller de a).

3.1.4. On note $\widetilde{S}(K_0')$ (resp. $E(K_0')$) l'adhérence dans R (resp. dans Fr R) de la sous-k-algèbre de R engendrée par ϵ (resp. de son corps des fractions).

On voit que $E(K_0')$ est un corps valué complet, à valuation discrète, de corps résiduel k, que $\widetilde{S}(K_0')$ est l'anneau de ses entiers et que $\epsilon - 1$ en est une uniformisante. En particulier ϵ appartient au $\mathbb{Z}_p$-module des unités de $\widetilde{S}(K_0')$ congrues à 1 modulo l'idéal maximal, et $E(K_0')$ est stable par G_{K_0} (si $\chi : G_{K_0} \to \mathbb{Z}_p^*$ désigne le caractère cyclotomique, on a $g(\epsilon) = \epsilon^{\chi(g)}$) et indépendant du choix de ϵ.

Le groupe fini $\mathbf{F}_p^* = \mathrm{Gal}(K_0'/K_0) = \mathrm{Gal}(K_\infty K_0'/K_\infty)$ opère sur $E(K_0')$, avec action triviale sur le corps résiduel. On note E_0 le corps fixe et $\widetilde{S}_0$ l'anneau de ses entiers. L'extension $E(K_0')/E_0$ est une extension cyclique de degré $p-1$ totalement ramifiée. On voit que $\tilde{\pi}_0 = 1 + \mathrm{tr}_{E(K_0')/E_0}(\epsilon) \in E_0$. Un calcul facile montre que $v(\tilde{\pi}_0) = p = (p-1).v(\epsilon - 1)$, i.e., que $\tilde{\pi}_0$ est une uniformisante de E_0.

En particulier, on a montré:

3.1.5. **Proposition**. *Avec les notations qui précèdent, soit $\widetilde{S}_0$ (resp. E_0) l'adhérence dans R (resp. dans $\mathrm{Fr}\ R$) de la sous-k-algèbre de R engendrée par $\tilde{\pi}_0$ (resp. de son corps des fractions). Alors $\widetilde{S}_0$ et E_0 sont indépendants du choix de ϵ, stables par G_{K_0} et fixes par $H_{K_0} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$. On a $v(\tilde{\pi}_0) = p$, E_0 est un corps valué complet, à valuation discrète, à corps résiduel k; l'anneau $\widetilde{S}_0$ est l'anneau de ses entiers et $\tilde{\pi}_0$ en est une uniformisante.*

3.1.6. **Théorème**. *Le corps $\mathrm{Fr}\ R$ est algébriquement clos. La fermeture algébrique $\overline{E}_0$ et la fermeture séparable $E_0^{\text{sép}}$ de E_0 dans $\mathrm{Fr}R$ sont denses dans $\mathrm{Fr}R$ et stables par G_{K_0}. L'action induite de H_{K_0} sur $E_0^{\text{s 'ep}}$ est E_0-linéaire et identifie H_{K_0} à $\mathrm{Gal}(E_0^{\text{sép}}/E_0)$. Pour tout sous-groupe fermé H de H_{K_0}, $(\mathrm{Fr}\ R)^H$ est le complété de la clôture radicielle de $(E_0^{\text{sép}})^H$ (en particulier, $(\mathrm{Fr}\ R)^{H_{K_0}}$ est le complété de la clôture radicielle de $E_0 = k((\tilde{\pi}_0))$).*

3.1.7 **Preuve**. Posons $\zeta = \epsilon^{(1)}$ et, pour tout n, $K_n = K(\epsilon^{(n)})$. Soit A_n le quotient de l'annneau des entiers de K_n par l'idéal $a_n = (\zeta - 1)\mathcal{O}_{K_n}$. On voit que pour tout $n \geq 2$, tout $g \in \mathrm{Gal}(K_n/K_{n-1})$ et tout $x \in \mathcal{O}_{K_n}$, $(g-1)x \in a_n$. Comme par ailleurs $p \in a_n$, l'application qui à $x \in \mathcal{O}_{K_n}$ associe l'image dans A_{n-1} de $\mathrm{Nor}_{K_n/K_{n-1}}(x)$ est un homomorphisme d'anneaux dont le noyau contient a_n. Par passage au quotient, on obtient donc un homomorphisme d'anneaux $A_n \to A_{n-1}$. L'anneau $A = \lim.\mathrm{proj}.A_n$ est l'anneau des entiers du corps des normes de l'extension $(\cup K_n)/K$ introduit dans [FW79] et étudié dans [Wi83].

Par ailleurs, l'inclusion de $\mathcal{O}_{K_n}$ dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ permet d'identifier chacun des A_n à un sous anneau de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/(\zeta-1)\mathcal{O}_{\overline{K}} = \mathcal{O}_C/a$ en notant a l'idéal de $\mathcal{O}_C$ engendré par $\zeta - 1$; via cette identification, l'application de transition de A_n dans A_{n-1} est juste l'élévation à la puissance p. Autrement dit l'anneau A s'identifie à un sous-anneau de R. Il est facile de voir qu'alors $A = k[[\epsilon - 1]] = \widetilde{S}(K_0')$, donc que le corps des normes de l'extension $(\cup K_n)/K$ est $E(K_0')$. Il résulte alors du théorème 3.1.2 de [Wi83] que E_0 est le corps des normes de l'extension. Le théorème résulte alors de [*op. cit.* , cor. 4.3.4].

3.1.8. Pour toute extension finie K de K_0 contenue dans $\overline{K}$, on note p^{r_K} le degré de l 'extension $K_\infty \cap K/K_0$, on pose

$$E(K) = \varphi^{-r_K}\left(\left(E_0^{\text{sép}}\right)^{H_K}\right) = \left(\varphi^{-r_K}\left(E_0^{\text{sép}}\right)\right)^{H_K}$$

et on note $\widetilde{S}(K)$ l'anneau des entiers de $E(K)$ (lorsque $K = K_0'$, les notations sont compatibles avec celles du n° 3.1.3). C'est une extension finie de E_0. Si $K \subset L$, $E(K) \subset E(L)$ et $[E(L) : E(K)] = [L : K]$, le degré d'inséparabilité étant $p^{r_L - r_K}$. Si l'extension L/K est galoisienne, $E(L)/E(K)$ est normale et le groupe de ses automorphismes s'identifie à $\mathrm{Gal}(LK_\infty/KK_\infty) = H_K/H_L$.

Enfin, si L est une extension algébrique de K_0 contenue dans $\overline{K}$, on note $E(L)$ la réunion des $E(K)$ pour K parcourant les extensions finies de K_0 contenues dans L.

3.2. *Le corps $W_{\overline{K}}(\mathrm{Fr}\ R)$ et quelques-uns de ses sous-anneaux*

3.2.1. Les anneaux $W(R)$ et $W(\mathrm{Fr}\ R)$ sont des $W(\bar{k})$-algèbres. Si A est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, ou l'anneau de ses entiers, et si k' est le corps résiduel de cette extension, on pose $W_A(R) = A \otimes_{W(k')} W(R)$ et $W_A(\mathrm{Fr}\ R) = A \otimes_{W(k')} W(\mathrm{Fr}\ R)$. Si L est une extension algébrique de K_0 contenue dans $\overline{K}$, on note $W_L(\mathrm{Fr}\ R)$ la limite inductive des $W_K(\mathrm{Fr}\ R)$, pour K parcourant les extensions finies de K_0 contenues dans L.

On voit que $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R) = W(\mathrm{Fr}\ R)[1/p]$ est un corps valué complet de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel Fr R, dont l'anneau des entiers est $W(\mathrm{Fr}\ R)$.

Le fermeture algébrique de K_0 dans $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$ s'identifie à l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans $\overline{K}$. On en déduit que pour toute extension algébrique L de K contenue dans $\overline{K}$, $W_L(\mathrm{Fr}\ R)$ est un corps, extension algébrique de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}R)$ dont l'anneau des entiers est $W_{\mathcal{O}_L}(\mathrm{Fr}\ R)$.

Le Frobenius φ agit sur Fr R (par $x \mapsto x^p$) et par fonctorialité sur $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$. Les sous-anneaux $W(R)$, $W(\mathrm{Fr}\ R)$ et $W_{K_0}(R) = W(R)[1/p]$ sont stables par φ.

L'action naturelle de G_{K_0} sur $\overline{K}$ et sur $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$ s'étend en une action sur $W_{\overline{K}}(\mathrm{Fr}\ R)$. Un grand nombre de ses sous-anneaux sont stables par G_{K_0}; si $K \subset L \subset \overline{K}$, $W_L(\mathrm{Fr}\ R)$ est stable par G_L (et aussi par G_{K_0} si

L/K_0 est galoisienne).

3.2.2. Dans $W(R)$, $[\epsilon]$ appartient au $\mathbb{Z}_p$-module des unités congrues à 1 modulo l'idéal maximal. On pose $\pi_\epsilon = [\epsilon] - 1 \in W(R)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n(R)$ (resp. $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$) s'identifie, en tant qu' ensemble à R^n (resp. $(\mathrm{Fr}\ R)^n$) et on le munit de la topologie produit (avec la topologie définie par la valuation sur R et $\mathrm{Fr}\ R$). On munit $W(R)$ et $W(\mathrm{Fr}\ R)$ de la topologie de la limite projective et $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R) = \cup\, p^{-n} W(\mathrm{Fr}\ R)$ de la topologie de la limite inductive.

Notons $S(K_0')$ (resp $\mathcal{E}(K_0')$) l'adhérence dans $W(R)$ (resp. dans $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$) du sous-anneau (resp. du sous corps) engendré par W et π_ϵ.

Il est immédiat que la réduction mod p de $S(K_0')$ s'identifie à $\widetilde{S}(K_0')$ et que $S(K_0')$ s'identifie à l'anneau des séries formelles en la variable π_ϵ à coefficients dans W. Le corps $\mathcal{E}(K_0')$ est un corps valué complet, absolument non ramifié, dont le corps résiduel s'identifie à $E(K_0')$ et l'anneau de ses entiers est le séparé complété de $W((\pi_\epsilon))$ pour la topologie p-adique.

Si $g \in G_{K_0}$, on a $g\pi_\epsilon = (1+\pi_\epsilon)^{\chi(g)} - 1$; on a aussi $\varphi\pi_\epsilon = (1+\pi_\epsilon)^p - 1$. On en déduit que $S(K_0')$ et $\mathcal{E}(K_0')$ sont indépendants du choix de ϵ, stables par G_{K_0} et φ.

On pose $S_0 = (S(K_0'))^{H_{K_0}}$ et $\mathcal{E}_0 = (\mathcal{E}(K_0'))^{H_{K_0}}$. En particulier $\mathcal{E}(K_0')/\mathcal{E}_0$ est une extension cyclique, de degré $p-1$. On pose

$$\pi_0 = -p + \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\epsilon]^{[a]}.$$

On voit que $\pi_0 = \ \mathrm{tr}_{\mathcal{E}(K_0')/\mathcal{E}_0}(\pi_\epsilon)$ et que l'image de π_0 dans R n'est autre que $\tilde{\pi}_0$.

La propostion suivante est alors immédiate:

3.2.3. **Proposition**. *Soit $\pi_0 \in W(R)$ défini par*

$$\pi_0 = -p + \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\epsilon]^{[a]}.$$

Alors l'adhérence S_0 de la sous-W-algèbre de $W(R)$ engendrée par π_0 s'identifie à l'anneau des séries formelles en π_0 à coefficients dans W. Le séparé complété de $W((\pi_0))$ pour la topologie p-adique s'identifie à l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$ d'un sous-corps fermé $\mathcal{E}_0$ de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$, qui est un corps absolument non ramifié dont le corps résiduel est E_0. Les anneaux S_0, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$, et $\mathcal{E}_0$ sont des sous-anneaux de $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$, stables par φ et G_{K_0}, indépendants du choix de ϵ.

3.2.4. *Remarque*. Soit t le générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à ϵ (i.e., t est ϵ mais on pense à lui additivement !). Soit $K_0((t))$ le corps des fractions du séparé complété de l'anneau $K_0 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(1)$ pour la topologie

t-adique (qui est indépendante du choix de t). Ce corps est muni d'une action naturelle de G_{K_0} et de φ (on pose $\varphi(\sum a_n t^n) = \sum \sigma(a_n)p^n t^n$). L'anneau $S(K_0')$ s'identifie à une sous-W-algèbre de $K_0((t))$ en identifiant $[\epsilon]$ à e^t (c'est indépendant du choix de ϵ, du moment que le choix de t est cohérent avec ϵ); cette identification est G_{K_0}-équivariante. On a donc

$$\pi_\epsilon = e^t - 1.$$

On a $S_0 \subset K_0((t))^{H_{K_0}} = K_0((t^{p-1}))$. On voit que

$$\pi_0 = (p-1). \sum_{n>0,\,(p-1)|n} t^n/n!.$$

On remarquera que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$ "refusent" de se plonger dans $K_0((t))$.

3.3. *Les φ-Γ-modules*

3.3.1. On reprend les hypothèses et notations du n° 1.1 et on suppose en outre que l'anneau A est muni d'une action d'un groupe Γ, compatible avec la structure d'anneau et commutant à l'endomorphisme σ.

On appelle *φ-Γ-module sur A* la donnée d'un φ-module sur A muni d'une action semi-linéaire de Γ commutant à l'action de φ.

Ces φ-Γ-modules sur A forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbf{\Gamma\Phi M}_A$, munie d'un produit tensoriel. Le foncteur "oubli de l'action de Γ" est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_A$ dans $\mathbf{\Phi M}_A$. Si

$$\Gamma' \to \Gamma$$

est un homomorphisme de groupes, Γ' agit par transport de structure sur A et on a un $\otimes$-foncteur exact et fidèle

$$\text{" transport de structure" : } \mathbf{\Gamma\Phi M}_A \to \mathbf{\Gamma'\Phi M}_A;$$

le foncteur "oubli de l'action de Γ" est le cas particulier correspondant à choisir $\Gamma' = \{1\}$.

3.3.2. Supposons maintenant A et Γ munis d'une topologie pour laquelle ils sont séparés et complets et que Γ opère continûment sur A. Supposons également A σ-plat et noethérien.

Par définition, un *φ-Γ-module étale sur A* est un φ-Γ-module M sur A, dont le φ-module sous-jacent est étale et sur lequel l'action de Γ est continue (il n'y a pas d'ambiguité sur la topologie de M car un φ-module étale est en particulier de type fini sur A).

Beaucoup des discours que l'on peut tenir sur les φ-modules étales s'étendent aux φ-Γ-modules étales. En particulier ceux-ci forment une $\otimes$-catégorie abélienne que nous notons $\mathbf{\Gamma\Phi M}_A^{\text{ét}}$.

3.4. *Représentations p-adiques de G_K*

3.4.1. On fixe une extension finie K de K_0 contenue dans $\overline{K}$. On écrit E, S, G, H, Γ au lieu de $E(K)$, $S(K)$, G_K, H_K, Γ_K s'il n'y a pas de risque de confusion.

On note $\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}_K = \widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}$ l'adhérence, dans $W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)$, de l'extension maximale non ramifiée de $\mathcal{E}$ contenue dans ce corps. L'anneau de ses entiers est l'adhérence de l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ dans $W(\mathrm{Fr}\ R)$.

Le groupe H s'identifie au groupe $G_E = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sép}}/E)$. On pose

$$\mathcal{E}_0(K) = \left(\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}\right)^H, \quad \mathcal{E}(K) = \varphi^{-r_K}\left(\mathcal{E}_0(K)\right) = \left(\varphi^{-r_K}\left(\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}\right)\right)^H$$

(lorsque $K = K_0'$, cette notation est compatible avec celle du n° 3.2.2); on note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}(K)$ (resp. $\mathcal{O}_\mathcal{E}(K)$) l'anneau des entiers de $\mathcal{E}_0(K)$ (resp. $\mathcal{E}(K)$). On a $\mathcal{E}_0(K_0) = \mathcal{E}(K_0) = \mathcal{E}_0$. On écrit $\mathcal{E}$, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ au lieu de $\mathcal{E}(K)$, $\mathcal{O}_\mathcal{E}(K)$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

On peut appliquer la proposition 1.2.6 et le foncteur $\boldsymbol{D}_\mathcal{E}$ induit une $\otimes$-équivalence entre représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de H et φ-modules étales sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

3.4.2. Mais on a beaucoup mieux: Si V est une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G, le φ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$

$$\boldsymbol{D}_\mathcal{E}(V) = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V\right)^H,$$

est muni d'une action semi-linéaire continue de $G/H = \Gamma$, i.e., a une structure naturelle de φ-Γ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

De même, si M est un φ-Γ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, le groupe G opère continûment sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} M$ et le $\mathbb{Z}_p$-module de type fini

$$\boldsymbol{V}_\mathcal{E}(M) = \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} M\right)_{\varphi=1}$$

est stable par G.

Le résultat suivant est immédiat:

3.4.3. **Théorème.** *Le foncteur $\boldsymbol{D}_\mathcal{E}$ induit une $\otimes$-équivalence entre les catégories $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ et $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$. Le foncteur $\boldsymbol{V}_\mathcal{E}$ est un quasi-inverse.*

3.4.4. *Remarques.* (a) Bien sûr, dans tout ce qui précède, on peut travailler avec $\mathcal{E}_0(K)$ à la place de $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K)$. Si $r = r_K$, le φ-Γ-module étale $\boldsymbol{D}_\mathcal{E}(V)$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}_0(K)}(V)$, vu comme $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-module via la restriction des scalaires $\varphi^{-r} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)} \to \mathcal{O}_\mathcal{E}(K)$ (via l'isomorphisme $\lambda \otimes x \mapsto \varphi^r(\lambda).\varphi^r(x)$, si $\lambda \in \varphi^{-r}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)})$ et $x \in \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(K)}(V)$).

(b) Soient $K_0 \subset K \subset L \subset \overline{K}$, avec L et K extensions finies de K_0. Si V est une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique de G_K, on a

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(L)}(V) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}(L)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(K)}(V).$$

Inversement, si l'on suppose en outre L/K galoisienne, $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(L)}(V)$ est muni d'une action semi-linéaire de $H(L/K) := H_K/H_L$. Si l'on pose $r = r_L - r_K$, on a $(E_L)^{H(L/K)} = \varphi^{-r}(E_K)$ et $\varphi^{-r}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}} \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(K)}(V) = (\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}(L)}(V))^{H(L/K)}$.

(c) Notons $\mathbf{\Gamma\Phi}\boldsymbol{M}^0_{\mathcal{E}}$ la catégorie des φ-Γ-modules sur $\mathcal{E}$ qui peuvent s'obtenir en rendant p-inversible à partir d'un φ-Γ-module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. On voit que c'est aussi la catégorie des $\mathcal{E}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une structure de φ-Γ-module, dont le φ-module sous-jacent est de pente 0 (cf. A1.2.7).

Pour tout objet D de cette catégorie, $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(D) = (\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes D)_{\varphi=1}$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel G_K opère. Le foncteur $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}$ définit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi}\boldsymbol{M}^0_{\mathcal{E}}$ et la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ et le foncteur

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}} : V \mapsto \left(\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes V\right)^{G_K}$$

est un quasi-inverse.

Il est parfois commode d'utiliser le foncteur contravariant $\boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}$ et son quasi-inverse $\boldsymbol{D}^*_{\mathcal{E}}$ définis par

$$\boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(D) = \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(D^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi}\boldsymbol{M}}\left(D, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}\right)$$

$$\text{et} \quad \boldsymbol{D}^*_{\mathcal{E}}(V) = \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V^*) = \mathrm{Hom}_{G_K}\left(V, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}\right).$$

3.4.5. *L'opérateur de monodromie*: Soient V une représentation p-adique de G_K, $M_0 = \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}_0}(V)$ et $M = \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$. Comme on l'a vu au n° 2.1.5., il existe sur M_0 une unique connexion

$$\nabla : M_0 \to M_0 \otimes \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}}$$

telle que $\nabla \circ \varphi = \varphi \circ \nabla$., et il est clair que ∇ commute à l'action de Γ.

D'autre part, $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}$-module libre de rang 1 de base $d_{\log}([\epsilon])$. Autrement dit l'application

$$a \otimes t \to a d_{\log}([\epsilon])$$

(où t est le générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à ϵ comme au n° 3.2.4) définit un isomorphisme *canonique* de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}$-modules

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)} \otimes \mathbb{Z}_p(1) \to \Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}}.$$

Le choix de ϵ permet alors de définir un opérateur (fonctoriel)

$$N : M_0 \to M_0,$$

en posant $\nabla x = Nx.d_{\log}([\epsilon])$.

On voit que N est W-linéaire, vérifie

$$N\varphi = p\varphi N, \quad Ng = \chi(g)gN, \quad \text{pour tout } g \in G$$

et $N(\lambda x) = \lambda.Nx + N\lambda.x$, si $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_0}$, $x \in M_0$ (et où, $d\lambda = N\lambda.d_{\log}([\epsilon])$.

On peut faire la même chose pour M, à condition de remplacer $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_0(K)}$ par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}(K)}$ et $d_{\log}([\epsilon])$ par $p^{-r_K} d_{\log}([\epsilon])$.

Il semble que, dans le cas d'une représentation p-adique potentiellement semi-stable ([Bu88]), N soit lié à l'opérateur de monodromie qui opère sur "la réalisation de de Rham" de cette représentation (cf. 11°).

B. Représentations p-adiques de hauteur finie

B1. *Le cas d'égale caractéristique: les φ-modules de hauteur finie*

1.1. *Conventions*

1.1.1. Dans tout ce paragraphe, on note S un anneau local régulier de dimension 2, complet, de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique p, muni d'un Frobenius, i.e., d'un endomorphisme

$$\varphi(=\sigma) : S \to S$$

vérifiant $\varphi x \equiv x^p (\text{mod } p)$.

Si m_S désigne l'idéal maximal de S, l'existence d'un Frobenius implique que $p \notin m_S^2$. Si l'on pose $W = W(k)$ et si l'on choisit $\pi \in m_S$ tel que $m_S = (p, \pi)$, l'anneau S s'identifie à l'anneau $W[\![\pi]\!]$ des séries formelles en π à coefficients dans W. Le Frobenius est déterminé par $\varphi\pi$ (qui peut être *a priori* n'importe quelle série formelle congrue à π^p mod p): on a

$$\varphi\left(\sum a_n \pi^n\right) = \sum \sigma(a_n)(\varphi\pi)^n,$$

où σ est le Frobenius usuel sur W (tout ce qu'on va faire dans la suite est indépendant du choix de π, qui permet seulement d'écrire tout explicitement).

1.1.2. On note $S_{(p)}$ le localisé de S en p, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ sa complétion et $\mathcal{E}$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p^n\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = S_{(p)}/p^nS_{(p)}$ et $S_n = S/p^nS$.

Le corps $\mathcal{E}$ est un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, dont le corps résiduel est $E = \text{Fr } S_1 = k((\tilde{\pi}))$, si $\tilde{\pi}$ désigne l'image de π dans S_1.

1.2. *Modules de type fini sur S*

1.2.1. Les idéaux premiers de hauteur 1 de S sont tous principaux. Il y a

– d'une part l'idéal engendré par p,

– d'autre part, les idéaux de la forme $(P(\pi))$, où P est un polynôme, à coefficients dans W, irréductible unitaire, dont tous les coefficients autre que celui du terme de plus haut degré sont divisibles par p.

Nous disons qu'un S-module est *élémentaire indécomposable* s'il est libre de rang un ou isomorphe à $S/\wp^n$, où $\wp$ est un idéal premier de hauteur 1 de S et n un entier ≥ 1.

Un S-module est dit *élémentaire* s'il est somme directe d'un nombre fini de modules élémentaires indécomposables. Dans une telle décomposition, la multiplicité de chaque facteur indécomposable est bien déterminée.

1.2.2. **Proposition**. *Si N est un S-module de type fini, il existe un S-module élémentaire M et une application S- linéaire*

$$\eta : N \to M,$$

dont le noyau et le conoyau sont des S-modules de longueur finie (on dit souvent que N est "quasi-isomorphe" à M). *De plus, M est unique à isomorphisme près.*

Preuve. C'est un résultat bien connu, qui est à la base de la théorie d'Iwasawa (cf., par exemple, [Se58] ou [La78], Thm. 3.1).

1.2.3. **Corollaire**. *Soit N un S-module de type fini sans torsion. Il existe des S-modules libres de type fini L et M et des applications S-linéaires injectives*

$$L \to N \quad \text{et} \quad N \to M$$

dont le conoyau est annulé par une puissance de p.

Preuve. Soit

$$\eta : N \to M$$

une application S-linéaire, à noyau et conoyau de longueur finie, de N dans un S-module élémentaire M. On peut écrire $M = M' \oplus M_{p\text{-tor}}$, où M' est un module élémentaire sans p-torsion. Comme N est sans torsion, η est injective, de même que son composé avec la projection de M sur M', ce qui montre que $M = M'$, i.e., que M est sans p-torsion.

Soit r un entier tel p^r annule Coker η. L'application, qui à $x \in M$ associe l'unique $y \in N$ tel que $\eta(y) = p^r x$, définit un isomorphisme de M sur un sous-module L de N. Mais alors L et M sont à la fois élémentaires et sans torsion, donc libres.

1.2.4. **Proposition**. *Soit N un S-module de type fini sans torsion. Alors $\mathcal{N} = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$ est un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-module libre de rang fini, l'application de N dans $\mathcal{N}$, qui à x associe $1 \otimes x$ est injective. Si l'on s'en sert pour identifier N à un sous-S-module de $\mathcal{N}$, $N[1/p] \cap \mathcal{N}$ es t un S-module libre de rang fini.*

Preuve. Soient $L \to N \to M$ comme dans le corollaire 1.2.3. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S L & \longrightarrow & \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N & \longrightarrow & \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S M \end{array}$$

où les flèches horizontales du haut sont injectives par définition, celles du bas par platitude et les flèches verticales extrêmes parce que L et M sont libres. On en déduit l'injectivité de la flèche verticale du milieu et le fait que $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S L$, $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S M$ et donc aussi $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$ sont des $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-modules libres de rang fini égal au rang d de M sur S. Si l'on utilise ces injections pour identifier tous ces modules à des sous-S-modules de $\mathcal{M} = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S M$, on voit que

$$N_0 = N[1/p] \cap \mathcal{N} = M[1/p] \cap \mathcal{N} \subset M[1/p] \cap \mathcal{M} = M$$

est un S-module de type fini. Par construction, l'application

$$N_0/pN_0 \to \mathcal{N}/p\mathcal{N}$$

est injective et N_0/pN_0 est un $\mathcal{O}_E$-module de type fini sans torsion, donc libre. Si $e_1, e_2, \ldots, e_d$ sont des éléments de N_0 qui relèvent une base de N_0/pN_0, les e_j engendrent N_0 et sont linéairement indépendants. Ils constituent donc une base de N_0 qui est bien libre.

1.2.5. On dit qu'un S-module M est *sans p'-torsion* si, pour tout $x \in M$ tel que Ann $(x) \neq 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que Ann $(x) = p^m S$.

Si M est un S-module de p-torsion, M est sans p'-torsion si et seulement s'il est sans π-torsion. Un S-module élémentaire M est sans p'-torsion si et seulement s'il est de la forme

$$M \simeq S^d \oplus \left(\oplus_{n \in \mathbb{N}} (S_n)^{d_n}\right),$$

où d et les d_n sont des entiers presque tous nuls.

1.2.6. Remarquons que si M est un S-module de type fini sans p'-torsion et tué par p, c'est un module de type fini, sans torsion sur $S_1 = k[\![\tilde{\pi}]\!]$; il est donc libre sur S_1, donc élémentaire. La proposition suivante permet alors de ramener, par dévissage, un certain nombre de questions sur les S-modules de type fini sans p'-torsion au cas où ceux-ci sont élémentaires.

1.2.7. **Proposition.** *Soit M un S-module de type fini, sans p'-torsion. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit*

$$M_i = \{x \in M \mid \exists\, r \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \pi^r x \in p^i M\}.$$

Alors M_i est indépendant du choix de π, chaque quotient M_i/M_{i+1} est un S_1-module libre et, pour i suffisamment grand, M_i est un S-module libre.

Preuve. Si π' est un autre élément de S tel que $m_S = (p, \pi')$, on peut, quitte à multiplier π par une unité supposer que $\pi' \equiv \pi (\mathrm{mod}\ p)$. On a donc $\pi'^r \equiv \pi^r (\mathrm{mod}\ p^i)$ dès que p^{i-1} divise r et M_i est bien indépendant du choix de π.

Chaque M_i/M_{i+1} est tué par p et sans π-torsion. C'est donc bien un S_1-module libre.

Soit $\eta : M \to L$ une application linéaire de M dans un S-module libre, telle que le noyau et le conoyau sont de p-torsion. Cette application permet d'identifier $M[1/p]$ à $L[1/p]$. Par ailleurs, si l'on définit les L_i comme les M_i, on a $L_i = p^i L$.

Notons $\overline{M}_i$ (resp $\bar{L}_i$) $\subset M[1/p]$ l'ensemble des $p^{-i} \otimes x$, pour $x \in M_i$ (resp. L_i). On a $\bar{L}_i = L$ et les $\overline{M}_i$ forment une suite croissante de sous-S-modules de L, qui est donc stationnaire.

Si l'on choisit i tel que $p^i M$ est sans p-torsion et $\overline{M}_i = \overline{M}_{i+1}$, on a $M_{i+1} = pM_i$, donc M_i/pM_i est libre sur S_1 et M_i est libre sur S.

1.2.8. *Remarque.* Si M est un S-module de type fini sans p'-torsion, il en est évidemment de même de Ker p^i et de $M/\mathrm{Ker}\ p^i$. En particulier, les Ker p^i/Ker p^{i+1} sont élémentaires.

1.2.9. Comme $\sigma : S \to S$ est fidèlement plat,

$$M \mapsto M_\sigma = S \underset{\sigma}{\otimes_S} M$$

est un foncteur exact et fidèle de la catégorie des S-modules de type fini dans elle-même.

Proposition. *Si M est un S-module de type fini, sans p'-torsion, alors M_σ est aussi sans p'-torsion.*

Preuve. Par dévissage, la proposition 1.2.7 nous ramène au cas où M est élémentaire; il suffit de le vérifier lorsque M est élémentaire indécomposable, auquel cas c'est trivial.

1.3. *Les φ-modules p-étales*

1.3.1. Nous disons qu'un φ-module M sur S est *p-étale* si c'est un S-module de type fini, sans p'-torsion , et si le φ-module $M_{(p)} = S_{(p)} \otimes_S M$ est étale. On note $\boldsymbol{\Phi M}^+_{S,p}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-modules sur S dont les objets sont ceux qui sont p-étales. C'est une catégorie additive, $\mathbb{Z}_p$-linéaire, qui n'est pas abélienne. Le foncteur $M \mapsto M_{(p)}$ est un foncteur additif, exact et fidèle de $\mathbf{\Phi M}^{+}_{S,p}$ dans $\mathbf{\Phi M}^{\text{ét}}_{S_{(p)}}$.

1.3.2. *Remarque.* Soit $\mathbf{\Phi M}_{S,p}$ la catégorie suivante:

– un objet est un couple (N, M) formé d'un φ-module étale N sur $S_{(p)}$ et d'un "S-réseau" M de N, i.e., d'un sous-S-module de type fini M de N tel que l'application naturelle $S_{(p)} \otimes_S M \to N$ est un isomorphisme (il revient au même de se donner un S-module de type fini M sans p'-torsion et une structure de φ-module sur $N = M_{(p)}$);

– un morphisme de (N_1, M_1) dans (N_2, M_2) est un morphisme de φ-modules $\alpha : N_1 \to N_2$ tel que $\alpha(M_1) \subset M_2$.

La catégorie $\mathbf{\Phi M}^{+}_{S,p}$ s'identifie alors à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M}_{S,p}$ formée des (N, M) tels que $\varphi(M) \subset M$.

1.3.3. **Proposition**. *Soit M un φ-module sur S, qui est un S-module de type fini, sans p'-torsion. Considérons les assertions suivantes:*

(i) *le φ-module M est p-étale;*

(ii) *il existe $q \in S$, non divisible par p, qui annule $M/\Phi(M_\sigma)$;*

(iii) *l'application $\Phi : M_\sigma \to M$ est injective.*

Alors (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). *Si M est de p-torsion, les trois assertions sont équivalentes.*

Preuve. D'après la proposition 1.2.9, M_σ est aussi sans p'-torsion et dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_\sigma & \longrightarrow & (M_\sigma)_{(p)} = \big(M_{(p)}\big)_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M_{(p)} \end{array}$$

les flèches horizontales sont des injections. Ceci nous permet d'identifier M (resp. M_σ) à un sous-S-module de $M_{(p)}$ (resp. de $(M_{(p)})_\sigma$).

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de ce que, si $q \in S$ n'est pas divisible par p, alors q est inversible dans $S_{(p)}$. Inversement, si M est p-étale et si $x_1, x_2, \ldots, x_d$ engendrent M comme S-module, il existe $y_1, y_2, \ldots, y_d \in (M_{(p)})_\sigma$ tels que $\Phi y_j = x_j$. Mais il existe $q \in S - pS$ tel que $q y_j \in M_\sigma$, pour tout j. Donc $\Phi(M_\sigma)$ contient le sous-S-module engendré par les $\Phi(q y_j) = q x_j$ et $M/\Phi(M_\sigma)$ est annulé par q.

Si M est p-étale, l'injectivité de $\Phi : (M_{(p)})_\sigma \to M_{(p)}$ implique celle de $M_\sigma \to M$ et (i) $\Rightarrow$ (iii). Si M est de p-torsion, et si $\Phi : M_\sigma \to M$ est injective, il en est de même de $(M_{(p)})_\sigma \to M_{(p)}$ qui est donc bijective puisque source et but sont des $S_{(p)}$-modules de même longueur finie; on a donc bien (iii) $\Rightarrow$ (i) dans ce cas.

1.3.4. Si M est un φ-module p-étale sur S, on appelle *hauteur de M* et on note $h(M)$ l'idéal Ann $(M/\Phi(M_\sigma))$.

1.3.5. **Proposition**. *Soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de φ-modules sur S dont les S-modules sous-jacents sont de type fini et sans p'-torsion. Alors M est p-étale si et seulement si M' et M'' le sont. S'il en est ainsi, $h(M') \supset h(M)$, $h(M'') \supset h(M)$ et la suite

$$0 \to M'/\Phi(M'_\sigma) \to M/\Phi(M_\sigma) \to M''/\Phi(M''_\sigma) \to 0$$

est exacte.

Preuve. Avec des notations évidentes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & M'_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M''_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & \Lambda' \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont toutes les lignes et les colonnes sont exactes.

Si M' et M'' sont p-étales, il existe q', $q'' \in S - pS$ tels que q' annule Λ' et q'' annule Λ''; alors $q'q''$ annule Λ et M est p-étale.

Supposons M p-étale. Il existe $q \in S - pS$ qui annule Λ; il annule *a fortiori* Λ'' et M'' est p-étale. D'après la proposition précédente, $\Phi : M''_\sigma \to M''$ est injective, donc $X = 0$. Le résultat est alors évident.

1.3.6. Soient M un φ-module p-étale sur S, M' un sous-φ-module de M et $M'' = M/M'$ le φ-module quotient. On dit que M' est un *sous-objet strict de* M ou que M'' est un *quotient strict de* M si M' et M'' sont tous deux p-étales. Ceci revient donc à demander que M'' soit sans p'-torsion.

Remarquons que, avec les notations de la proposition 1.2.7, si M est un φ-module p-étale sur S, les M_ι sont des sous-objets stricts de M, chaque

M_{i+1} étant un sous-objet strict de M_i. La proposition 1.2.7 implique donc que tout φ-module p-étale peut se fabriquer par un nombre fini d'extensions successives de φ-modules p- étales élémentaires.

1.4. *Les foncteurs j^* et j_**

1.4.1. On note $j : S \to \mathcal{O}_\mathcal{E}$ l'inclusion. Si M est un φ-module sur S,

$$j^*(M) = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S M = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_{S_{(p)}} \left(S_{(p)} \otimes_S M\right)$$

et le lemme de Nakayama implique que, si M est de type fini et sans p'-torsion, alors M est p-étale si et seulement si $j^*(M)$ est étale.

Comme $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est plat sur S, le foncteur j^* est exact; sa restriction à la catégorie des φ-modules sur S qui sont p-étales, est un foncteur exact et fidèle, que nous notons encore

$$j^* : \boldsymbol{\Phi M}^+_{S,p} \to \boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}.$$

Nous allons voir que ce foncteur admet un adjoint à droite. Pour cela, pour tout φ-module $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, notons $F_S(\mathcal{N})$ l'ensemble des sous-S-modules de type fini de $\mathcal{N}$, stables par φ.

1.4.2. **Théorème**. (i) *Soit $\mathcal{N}$ un φ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Alors, si $N \in F_S(\mathcal{N})$, N est p-étale sur S et l'application naturelle $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N \to \mathcal{N}$ est injective. En outre*

$$j_*(\mathcal{N}) = \cup_{N \in F_S(\mathcal{N})} N$$

est encore dans $F_S(\mathcal{N})$.

(ii) *Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$, $j^*j_*\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est un monomorphisme; c'est un isomorphisme si $\mathcal{N}$ est de p-torsion.*

(iii) *Si $\mathcal{N}$ est un objet de $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$, sans p-torsion, alors $j_*\mathcal{N}$ est libre sur S, de rang inférieur ou égal au rang de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et $j^*j_*\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est un isomorphisme si et seulement si*

$$\operatorname{rang}_S(j_*\mathcal{N}) = \operatorname{rang}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(\mathcal{N}).$$

(iv) *Les foncteurs j^* et j_* sont adjoints* (i.e., si M est un objet de $\boldsymbol{\Phi M}^+_{S,p}$ et $\mathcal{N}$ un objet de $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ on a

$$\operatorname{Hom}(M, j_*\mathcal{N}) = \operatorname{Hom}(j^*M, \mathcal{N})).$$

Remarquons que, si N_1, $N_2 \in F_S(\mathcal{N})$, alors $N_1 + N_2$ aussi. En particulier, $j_*(\mathcal{N})$ est un φ-module sur S. On peut donc au moins considérer j_* comme un foncteur additif

$$j_* : \boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} \to \boldsymbol{\Phi M}_S.$$

et il est clair que ce foncteur est exact à gauche.

1.4.3. **Lemme**. *Si $\mathcal{N}$ est de p-torsion, alors $F_S(\mathcal{N})$ contient un φ-module N_0 sur S qui engendre $\mathcal{N}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module.*

Preuve. Choisissons des éléments $e_1, e_2, \ldots, e_d \in \mathcal{N}$ et des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_d \geq 1$ tels que Ann $(e_j) = p^{n_j}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $\mathcal{N} = \oplus_{1\leq j\leq d}\mathcal{O}_{\mathcal{E},n_j}.e_j$. Si n est le plus grand des n_j, on peut trouver une matrice $A = (a_{j,\ell})_{1\leq j,\ell\leq d}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n}$ telle que

$$\varphi e_j = \sum a_{j,\ell}e_\ell,$$

et le fait que $\mathcal{N}$ est étale implique que la matrice A est inversible.

Choisissons $q \in m_S \cap (S - pS)$ tel que $\varphi q \equiv q^p (\mathrm{mod}\ p^n)$ (comme $\varphi\pi \equiv \pi^p (\mathrm{mod}\ p)$, on peut prendre, par exemple, $q = \pi^{p^{n-1}}$).

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E},n} = S_n[1/q]$, il existe un entier s tel que tous les $q^S a_{j,\ell} \in S_n$. Si je choisis r tel que $(p-1)r \geq s$, on a

$$\varphi(q^r e_j) = \sum q^{(p-1)r} a_{j,\ell} q^r e_\ell,$$

et il suffit de prendre pour N_0 le sous-S-module engendré par les $q^r e_j$.

1.4.4. **Lemme**. *Les assertions* (i) *et* (ii) *sont vraies lorsque $\mathcal{N}$ est tué par p.*

Preuve. Commençons par remarquer que $\mathcal{N}$ est un E- espace vectoriel de dimension finie d. Tout objet de $F_S(\mathcal{N})$, comme n'importe quel sous-$\mathcal{O}_E$-module de type fini de $\mathcal{N}$, est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang $\leq d$ et l'application $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N \to \mathcal{N}$ est injective. Elle identifie donc $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N$ à un sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de $\mathcal{N}$ stable par φ, qui est donc étale et N est bien p-étale.

Soit N_0 un élément de $F_S(\mathcal{N})$ contenant une base $(e_j)_{1\leq j\leq d}$ de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E},1} = E$. Soit $\mathcal{L} = \wedge^d\mathcal{N}$. Si $e = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_d$, il existe une unité η de $S_1 = \mathcal{O}_E$ et un entier m tels que $\varphi e = \pi^m \eta e$. On en déduit que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe une unité η_s de $\mathcal{O}_E$ telle que

$$\varphi^s(e) = \pi^{m\left(1+p+p^2+\cdot\ +p^{s-1}\right)}.\eta_s e.$$

Soient N_1 le sous-S-module de $\mathcal{N}$ engendré par les e_j et r un entier tel que $(p-1)r > m$. *Montrons que, si $N \in F_S(\mathcal{N})$, alors $N \subset \pi^{-r+1}N_1$:*

Quitte à remplacer N par $N + N_1$, on peut supposer que les $e_j \in N$. Si $N \not\subset \pi^{-r+1}N_1$, on pourrait trouver $x_1, x_2, \ldots, x_d \in E$, avec l'un des x_j égal à π^{-r} tels que $x = \sum x_j e_j \in N$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $x_d = \pi^{-r}$. On aurait donc $y = e_1 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_{d-1} \wedge x \in L = \wedge^d N$, qui est un sous-$\mathcal{O}_E$-module libre de rang un de $\mathcal{L}$, stable par φ. Mais ce n'est pas possible car $y = \pi^{-r}e$, donc, pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^s(y) = \pi^{-rp^s+m\left(1+p+p^2+\ldots+p^{s-1}\right)}.\eta_s e$$

et les $\varphi^s(y)$ engendrent $\mathcal{L}$ comme S-module.

Par conséquent, toute suite croissante d'éléments de $F_S(\mathcal{N})$ est stationnaire. Donc $j_*(\mathcal{N})$ est un objet de $F_S(\mathcal{N})$ et est bien p-étale. La double inclusion $N_1 \subset j_*(\mathcal{N}) \subset \pi^{-r+1}N_1$ montre que $j_*(\mathcal{N})$ est un sous-$\mathcal{O}_E$-module du E-espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{N}$, contenant une base de E et ayant son rang égal à la dimension de $\mathcal{N}$, et

$$j^*j_*(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$$

est bien un isomorphisme.

1.4.5. **Lemme.** *Les assertions* (i) et (ii) sont vraies lorsque $\mathcal{N}$ est de p-torsion.

Preuve. Pour tout $N \in F_S(\mathcal{N})$, l'injectivité de l'application $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N \to \mathcal{N}$ résulte de ce que c'est injectif lorsque l'on se restreint au noyau de la multiplication par p; en particulier $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$ s'identifie à un sous-objet de $\mathcal{N}$ et est donc étale et N est bien p-étale. Comme S est noethérien, pour achever de prouver (i), il suffit de vérifier que $j_*(\mathcal{N})$ est un S-module de type fini.

On va procéder par récurrence sur le plus petit entier n tel que $p^n\mathcal{N} = 0$.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ p \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Im}\ p \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow j_*(\mathrm{Ker}\ p) \longrightarrow j_*(\mathcal{N}) \longrightarrow j_*(\mathrm{Im}\ p).$$

D'après le lemme précédent, $j_*(\mathrm{Ker}\ p)$ est un S-module de type fini; il en est de même, par hypothèse de récurrence de $j_*(\mathrm{Im}\ p)$, et donc aussi de $j_*(\mathcal{N})$.

Pour (ii), on remarque que, d'après le lemme 1.4.3, l'application

$$j^*j_*(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}$$

est surjective, tandis que l'injectivité résulte de (i).

1.4.6. **Lemme.** *Les assertions* (i), (ii) et (iii) sont vraies lorsque $\mathcal{N}$ est sans p-torsion.

Preuve. Soient $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}/p\mathcal{N}$, ϱ la projection de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}_1$ et N_1 la somme des $\varrho(N)$ pour $N \in F_S(\mathcal{N})$. Il est clair que $N_1 \subset j_*(\mathcal{N}_1)$; c'est donc un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang r inférieur ou égal au rang d de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Soit $M \in F_S(\mathcal{N})$ tel que la projection de M sur N_1 est surjective (il est clair qu'un tel M existe). Soient $(e_j)_{1\leq j\leq r}$ des éléments de M relevant une base de N_1 et P le S-module libre engendré par les e_j. Montrons que $M = P$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $M^n = (p^{-n}M) \cap \mathcal{N}$; les M^n forment une suite croissante d'éléments de $F_S(\mathcal{N})$ vérifiant $\varrho(M^n) = N_1$.

Si $x \in M$, on fabrique, de proche en proche des suites $x_i \in P$ et $y_i \in M^i$ telles que

$$x = x_0 + px_1 + \ldots + p^{n-1}x_{n-1} + p^n y_n;$$

donc $x = \sum p^i x_i \in P$. Ceci prouve que $j_*(\mathcal{N}) = P$, et les assertions (ii) et (iii) en résultent.

Si $N \in F_S(\mathcal{N})$, $N \subset P$; l'application $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N \to \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S P$ est injective, donc aussi son composé avec l'application $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S P \to \mathcal{N}$; ceci nous permet en particulier d'identifier $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$ à un sous-objet de $\mathcal{N}$ qui est donc étale, d'après la proposition A1.1.6 et N est bien p-étale.

1.4.7. Terminons la *démonstration du théorème*: Les assertions (i) et (ii) ont déjà été vérifiées lorsque, ou bien $\mathcal{N}$ est de p-torsion, ou bien $\mathcal{N}$ est libre. Le cas général s'en déduit en considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{N})_{p\text{-tor}} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}/(\mathcal{N})_{p\text{-tor}} \longrightarrow 0.$$

L'assertion (iii) vient d'être prouvée. Enfin, l'assertion (iv) est évidente.

1.4.8. Si N est un objet de $\mathbf{\Phi M}^+_{S,p}$, on dit que N est *normal* si

$$N \to j_* j^*(N)$$

est un isomorphisme.

Pour tout objet N de $\mathbf{\Phi M}^+_{S,p}$, $j_* j^*(N)$ est normal; on l'appelle le *normalisé de* N.

1.4.9. On dit qu'un φ-module étale $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ *est de S-hauteur finie* si $j^* j_* \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est un isomorphisme. Il revient au même de dire qu'il existe un objet N de $\mathbf{\Phi M}^+_{S,p}$ tel que $j^* N$ est isomorphe à $\mathcal{N}$. Tout φ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ n'est pas de S-hauteur finie, mais le théorème 1.4.2 montre que tous ceux qui sont de p-torsion le sont.

La sous-catégorie pleine $\mathbf{\Phi M}^+_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}(S)$ de $\mathbf{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ formée des φ-modules de S-hauteur finie est l'image essentielle du foncteur $j^* : \mathbf{\Phi M}^+_{S,p} \to \mathbf{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$.

1.5. *La q-hauteur*

1.5.1. On note $\overline{\mathbb{N}}$ l'ensemble qui est l'union disjointe de $\mathbb{N}$ et de l'ensemble des r^+, pour $r \in \mathbb{N}$. On munit $\overline{\mathbb{N}}$ d'une relation d'ordre total en convenant que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$r < r^+ < r + 1.$$

1.5.2. Soit $q \in S - pS$. Si M est un φ-module p-étale non nul sur S, on note $h_q(M)$ et on appelle *q-hauteur de M* l'élément de $\overline{\mathbb{N}} \cup \{+\infty\}$ ainsi défini: si $M/\Phi(M_\sigma)$ n'est annulé par aucune puissance de q, $h_q(M) = +\infty$; sinon, soit $r \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que q^r annule $M/\Phi(M_\sigma)$;

– si M n'a pas de quotient strict (cf. n° 1.3.6) non nul M' tel que $\varphi(M') \subset q^r M'$, alors $h_q(M) = r$;

– sinon $h_q(M) = r^+$.

1.5.3. Si u est une unité de S, on a $h_{uq}(M) = h_q(M)$, pour tout φ-module p-étale non nul M sur S.

Soit M un φ-module p-étale non nul sur S. Si M est de p-torsion, il est de q-hauteur finie. Dans le cas général, on peut trouver des idéaux premiers $(\mathfrak{q}_i)_{1\leq i\leq d}$ de hauteur 1 de S, des entiers $n_i \geq 1$, et une application S-linéaire

$$M/\Phi(M_\sigma) \to \oplus_{1\leq i\leq d} S/(\mathfrak{q}_i)^{n_i}$$

à noyau et conoyau de longueur finie. Alors M est de q-hauteur finie si et seulement si q appartient à chacun des $\mathfrak{q}_i$.

1.5.4. On note $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M}_{S,p}^+$ formée des objets de q-hauteur finie. Pour tout $r \in \overline{\mathbf{N}}$, on note $\mathbf{\Phi M}_S^r(q)$ (resp. $\mathbf{\Phi M}_{S,\mathrm{tor}}^r(q)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M}_{S,p}^+$ formée des objets de q-hauteur $\leq r$ (resp. et de torsion). D'après la proposition 1.3.5, pour tout $r \in \mathbf{N}$, tout sous-objet strict et tout quotient strict d'un φ-module p-étale sur S de q-hauteur $\leq r^+$ est encore de q-hauteur $\leq r^+$. On vérifie facilement que ceci reste vrai lorsque l'on remplace r^+ par r, i.e., que si M est tel que $M/\Phi M_\sigma$ est tué par q^r, alors, si M n'a pas de quotient strict non nul M' tel que $\varphi(M') \subset q^r M'$, il n'a pas non plus de sous-quotient strict non nul satisfaisant cette propriété.

1.5.5. La restriction de j^* à $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ admet un adjoint à gauche j_*^q: si $\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$, et si $\mathrm{Et}_q(\mathcal{N})$ désigne l'ensemble des sous-S-modules de $\mathcal{N}$ stables par φ qui sont des φ-modules p-étales de q-hauteur finie, on prend

$$j_*^q(\mathcal{N}) = \cup_{N\in \mathrm{Et}_q(\mathcal{N})} N.$$

C'est bien un S-module de type fini car c'est un sous-module de $j_*(\mathcal{N})$. Si $\mathcal{N}$ est de p-torsion, on a $j_*^q(\mathcal{N}) = j_*(\mathcal{N})$.

Si $\mathcal{N}$ est sans torsion, $j_*^q(\mathcal{N})$ est un S-module libre. Pour le prouver, il suffit de vérifier que, pour tout $N \in Et_q(\mathcal{N})$, il existe $N' \in Et_q(\mathcal{N})$ qui contient N et est un S-module libre. Mais N s'identifie à un sous-S-module du φ-module $\mathcal{N}' = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$ étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. D'après la proposition 1.2.4, $N' = N[1/p] \cap \mathcal{N}'$ est un S-module libre. Il est clair qu'il est stable par φ et contient N. Il existe un entier s tel que $p^s N' \subset N$, donc N' isomorphe à un sous-φ-module de N est p-étale, en particulier $N'/\Phi(N'_\sigma)$ est tué par un élément $\alpha \in S - pS$. Par ailleurs, on voit que si q^r annule $N/\Phi(N_\sigma)$, $q^r p^s$ annule $N'/\Phi(N'_\sigma)$. Donc $N'/\Phi(N'_\sigma)$ est annulé par une puissance de q.

On dit que $\mathcal{N}$ est *de q-hauteur finie* si $j^* j_*^q(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ (ce qui est toujours le cas si $\mathcal{N}$ est de p-torsion). Il revient au même de dire qu'il existe un objet N de $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ tel que $j^* N$ est isomorphe à $\mathcal{N}$. S'il en est ainsi, on note

$h_q(\mathcal{N})$ et on appelle q-hauteur de $\mathcal{N}$ la plus petite des q-hauteurs de tels N. On note aussi $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(S,q)$ (resp. $\boldsymbol{\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(S,q)$) la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(S)$ formée des objets de q-hauteur finie (resp. de q-hauteur $\leq r$). Ce sont des sous-catégories stables par sous-objet et quotient.

1.5.6. Pour tout $a \in S$, on note (a) l'idéal engendré par a.

Proposition. *Supposons q irréductible, (π) stable par σ et $\sigma\pi \in (q)$. Alors, pour tout objet N de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S}(q)$, le conoyau de*

$$N \to \ Nor_q(N) := j^q_* j^*(N)$$

est annulé par une puissance de π. Il est même de longueur finie, s'il existe un idéal premier non nul de S, différent de (π) et (q) contenant $\sigma\pi$.

Preuve. Soit $M = \operatorname{Nor}_q(N)$. Avec des notations évidentes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & N_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & M''_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont toutes les lignes et les colonnes sont exactes.

Pour tout S-module Λ de type fini et de torsion, notons $\operatorname{Ass}(\Lambda)$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de S tels qu'il existe $x \in \Lambda$, dont l'annulateur est $\mathfrak{q}$. C'est aussi l'ensemble des idéaux premiers qui contiennent l'annulateur d'un module élémentaire "quasi-isomorphe" à Λ (cf. n° 1.2.2).

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M'' = 0$, M'' est de p'-torsion, donc aussi M''_σ. Par hypothèse L' et L sont de q-torsion, donc X et L'' aussi. On en déduit que $\operatorname{Ass}(M'') \cup \{(q)\} = \operatorname{Ass}(M''_\sigma) \cup \{(q)\}$.

Si $\mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{q}''$ sont deux idéaux premiers de hauteur 1, distincts de S, les idéaux premiers de hauteur 1 qui divisent $\sigma\mathfrak{q}'$ sont distincts de ceux qui divisent $\sigma\mathfrak{q}''$. On en déduit que, si $\mathrm{Ass}(M'') = \{(\mathfrak{q}_i)_{1\leq i\leq d}\}$, $\mathrm{Ass}(M''_\sigma)$ est l'union disjointe des

$Q_i = \{$idéaux premiers de hauteur 1 de S divisant $\sigma\mathfrak{q}_i\}$.

Si $(\pi) \in \mathrm{Ass}(M'')$, disons $(\pi) = (\mathfrak{q}_d)$, on doit donc avoir $Q_d = \{(\pi),(q)\}$

Soit $d' = d-1$ si $(\pi) \in \mathrm{Ass}(M'')$, $= d$ sinon. Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que $d' = 0$. Pour $1 \leq i \leq d'$, Q_i doit avoir un seul élément. Si $d' \neq 0$, il existerait donc un entier $r \geq 1$ tel que $\sigma^r\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_1$, ce qui contredit le lemme suivant:

1.5.7. **Lemme.** *Soit $r \geq 1$. Sous les hypothèses de la proposition qui précède (π) et (p) sont les seuls idéaux premiers de hauteur 1 de S stables par σ^r.*

Preuve. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de S stable par σ^r, différent de (π) et p. L'anneau quotient $S/\mathfrak{q}$ est une W-algèbre finie et plate, intègre, munie d'un endomorphisme σ^r vérifiant $\sigma^r(x) \equiv x^{p^r} \pmod p$. On en déduit que $S/\mathfrak{q}$ s'identifie à l'anneau $W' = W(k')$ des vecteurs de Witt à coefficients dans une extension finie k' de k. Mais il existe $\lambda \in S$ tel que $\sigma^r(\pi) = \lambda\pi$, et il est clair que λ n'est pas une unité. Si ρ désigne la projection de S sur $S/\mathfrak{q}$, on a $\varrho(\pi) \neq 0$, et il existe un entier m et une unité $u \in W'$ tels que $\varrho(\pi) = p^m u$; donc aussi une unité v de W' telle que $\sigma^r(\varrho(\pi)) = v.\varrho(\pi)$. Mais $\sigma^r(\varrho(\pi)) = \varrho(\sigma^r(\pi)) = \varrho(\lambda)\varrho(\pi)$ et $\varrho(\lambda)$ n'est pas une unité.

1.6. *Relèvement des modules de q-hauteur finie*

1.6.1. **Théorème.** *Soit q un élément de S dont l'image dans S_1 est une uniformisante. Soit $\varrho \in \overline{\mathbb{N}}$. Tout objet de $\mathbf{\Phi M}_S^\varrho(q)$ est quotient d'un objet de $\mathbf{\Phi M}_S^\varrho(q)$ sans torsion.*

1.6.2. Supposons d'abord que q est un élément quelconque de $S - pS$. Si M est un φ-module sur S, sans q-torsion, on définit la *q-filtration* sur M_σ et la *q-filtration conjuguée* sur M en posant, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$F_q^i M_\sigma = \{x \in M_\sigma | \Phi x \in q^i M\} \quad \text{et} \quad C_i^q M = q^{-i}.\Phi\left(F_q^i M\right).$$

On a $F_q^0 M_\sigma = M_\sigma$, $q.F_q^i M_\sigma \subset F_q^{i+1} M_\sigma \subset F_q^i M_\sigma$ et $C_i^q M \subset C_{i+1}^q M$.

Si M est un φ-module p-étale non nul, dire qu'il est de q-hauteur finie équivaut à dire que $C_i^q M = M$, pour i assez grand. Si r est le plus petit des i tel que c'est vrai, la q-hauteur de M est r s'il n'existe pas de quotient strict non nul M'' de M tel que $F_q^r M''_\sigma = M''_\sigma$, et r^+ sinon.

1.6.3. Supposons maintenant q comme dans le théorème et soit M un φ-module p-étale sur S, annulé par p; posons $\overline{M} = i^*(M) = M/\pi M = M/qM$ et $\overline{M}_\sigma = M_\sigma/\pi M_\sigma = M_\sigma/qM_\sigma$. Ce sont des k-espaces vectoriels de même dimension finie. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons $F_q^i\overline{M}_\sigma$ l'image de

$F_q^i M_\sigma$ dans $\overline{M}_\sigma$ et $C_i^q \overline{M}$ l'image de $C_i^q M$ dans $\overline{M}$. Posons aussi $\mathrm{gr}_q^i \overline{M}_\sigma = F_q^i \overline{M}_\sigma / F_q^{i+1} \overline{M}_\sigma$ et $\mathrm{gr}_i^q \overline{M} = C_i^q \overline{M} / C_{i-1}^q \overline{M}$ (en convenant que $C_{-1}^q \overline{M} = 0$).

Si $r \in \mathbb{N}$, alors M est dans $\boldsymbol{\Phi M}_S^{r^+}(q)$ si et seulement si $C_r^q \overline{M} = \overline{M}$.

1.6.4. **Lemme**. *Conservons les hypothèses et notations ci-dessus.*

(i) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une unique application k-linéaire*

$$\mathrm{Car}_i : \ \mathrm{gr}_q^i \overline{M}_\sigma \to \ \mathrm{gr}_i^q \overline{M}$$

telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_q^i M_\sigma & \xrightarrow{q^{-i}\Phi} & F_i^q M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}_q^i \overline{M}_\sigma & \xrightarrow{\mathrm{Car}_i} & \mathrm{gr}_i^q \overline{M} \end{array}$$

soit commutatif.

(ii) *Si M est un objet de $\boldsymbol{\Phi M}_S^{r^+}(q)$, on a $\mathrm{gr}_q^i \overline{M}_\sigma = 0$, pour $i > r$ et*

$$\mathrm{Car} \ := \oplus_{0 \leq i \leq r} \mathrm{Car}_i : \ \mathrm{gr}_q^{\cdot} \overline{M}_\sigma \to \ \mathrm{gr}_{\cdot}^q \overline{M}$$

est un isomorphisme.

[La notation Car traduit le fait que cet isomorphisme semble jouer dans ce contexte un rôle analogue à l'inverse de l'isomorphisme de Cartier.]

Preuve. Montrons (i). L'unicité de Car_i est évidente. Son existence revient à vérifier que le noyau de l'application composée

$$F_q^i M_\sigma \xrightarrow{q^{-i}\Phi} F_i^q M \longrightarrow \mathrm{gr}_i^q \overline{M},$$

qui contient $F_q^{i+1} M$, contient aussi $(qM_\sigma) \cap F_q^i M_\sigma$, ce qui est clair car l'image par $q^{-i}\Phi$ de ce sous-S-module est contenu dans $F_{i-1}^q M$.

Enfin, l'application Car est surjective par construction, et l'assertion (ii) résulte immédiatement de ce que $\dim_k \overline{M}_\sigma = \dim_k \mathrm{gr}_{\cdot}^q \overline{M}$.

1.6.5. *Prouvons le théorème*: Soit r l'unique entier tel que $\varrho \in \{r, r^+\}$ et soit M un objet de $\boldsymbol{\Phi M}_S^\varrho(q)$.

(a) Supposons M annulé par p et reprenons les notations du n° 1.6.3. Choisissons une base $(\bar{e}_j)_{1 \leq j \leq d}$ de M adaptée à la filtration conjuguée, i.e., telle que, si i_j désigne le plus petit entier i tel que $\bar{e}_j \in C_i^q \overline{M}$, alors $C_i^q \overline{M}$ soit le sous-k-espace vectoriel de $\overline{M}$ de base les $\bar{e}_j$, avec $i_j \leq i$. Pour chaque j, choisissons aussi un relèvement e_j de $\bar{e}_j$ dans $C_{i_j}^q M$ et notons e_j' l'unique élément de M_σ tel que $\Phi e_j' = q^{i_j} e_j$. Il résulte du lemme précédent que les images des e_j' dans $\overline{M}_\sigma$ forment une base de $\overline{M}_\sigma$; par conséquent, les e_j forment une base de M sur S_1 tandis que les e'_j forment une base de M_σ sur S_1. Autrement dit, si l'on écrit

$$e'_j = \sum_{1\leq \ell\leq d} a_{j,\ell}\otimes e_\ell, \text{ avec les } a_{j,\ell}\in S_1,$$

la matrice des $a_{j,\ell}$ est inversible dans S_1.

Choisissons alors des relèvements $\hat{a}_{j,\ell}$ des $a_{j,\ell}$ dans S et notons $(\hat{e}_j)_{1\leq j\leq d}$ la base canonique de $N = S^d$. Alors les $\hat{e}'_j = \sum \hat{a}_{j,\ell}\otimes\hat{e}_\ell \in N_\sigma$ forment une base de N_σ sur S. On munit N d'une structure de φ-module en posant $\Phi\hat{e}'_j = q^{i_j}\hat{e}_j$. L'application S-linéaire de N sur M qui envoie $\hat{e}_j$ sur e_j identifie M à un quotient du φ-module sans torsion N. Il est clair que N est un objet de $\mathbf{\Phi M}_S^{r,+}(q)$. Enfin, si N' est un sous-objet strict non nul de N tel que $N'' = N/N'$ est non nul et vérifie $\varphi N''\subset q^r N''$, alors $M'' = N/(N'+pN)$ est un quotient strict non nul de M vérifiant $\varphi M''\subset q^r M''$; donc si M est dans $\mathbf{\Phi M}_S^r(q)$, alors N aussi.

(b) Passons maintenant au cas général. Pour tout S-module N de type fini sans p'-torsion, on définit, comme dans la proposition 1.2.7,

$$N_i = \{x\in N \mid \exists\, r\in\mathbb{N} \text{ tel que } \pi^r x\in p^i N\}.$$

Pour i suffisamment grand M_i est sans torsion, et il suffit de fabriquer une suite

$$M = M^0 \leftarrow M^1 \leftarrow \ldots \leftarrow M^i \leftarrow \ldots$$

de morphismes surjectifs dans la catégorie $\mathbf{\Phi M}_S^\varrho(q)$ telle que, pour tout i, la projection de M^i sur M^0 induise une application injective de M^i_{tor} sur M_{tor} dont l'image est exactement $(M_i)_{\mathrm{tor}}$.

On procède par récurrence sur i, le cas $i=0$ étant clair. Supposons $i>0$ et soit N^i le quotient de M^{i-1} par $(M^{i-1})_1$. C'est un objet de $\mathbf{\Phi M}_S^\varrho(q)$ tué par p et (a) nous permet de réaliser N^i comme la réduction modulo p d'un objet L^i de $\mathbf{\Phi M}_S^\varrho(q)$ qui est libre comme S-module. On vérifie immédiatement que le produit fibré $M^i = M^{i-1}\times_{N^i} L^i$ convient.

1.7. *Les modules de petit hauteur*

1.7.1. Pour tout $r\in\overline{\mathbb{N}}$, soit $\mathbf{\Phi M}_{S_1}^r(\pi)$ (resp. $\mathbf{\Phi M}_E^r(\pi)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M}_S^r(\pi)$ (resp. $\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^r(S,\pi)$) formée des objets M tués par p.

Théorème. *Tout objet de la catégorie $\mathbf{\Phi M}_{S_1}^{p-1}(\pi)$ est normal. Cette catégorie est abélienne, la restriction de j^* à $\mathbf{\Phi M}_{S_1}^{p-1}(\pi)$ est pleinement fidèle et induit une équivalence entre cette catégorie et $\mathbf{\Phi M}_E^{p-1}(\pi)$. La restriction de j_* est un quasi-inverse.*

Preuve. Toutes ces assertions résultent facilement de la première. Il suffit donc de vérifier que, si M est un objet de $\mathbf{\Phi M}^{p-1}_{S_1}(\pi)$ et si $N = j_*j^*M$, alors l'inclusion $M \to N$ est une égalité.

Remarquons (cela ne nous sera utile que si $M/\Phi(M_\sigma)$ n'est pas annulé par π^{p-2}) que l'on peut supposer k algébriquement clos (sinon, si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, et si $\overline{S}_1 = \bar{k} \otimes S_1$, on voit que, avec des notations évidentes, $\bar{k} \otimes M$ est un objet de $\mathbf{\Phi M}^{p-1}_{\overline{S}_1}(\pi)$; si on avait $M \neq N$, on aurait $\bar{k} \otimes M \neq \bar{k} \otimes N \subset \mathrm{Nor}(\bar{k} \otimes M)$).

Supposons $M \neq N$; posons $L = N/M$, $\widetilde{M} = M/\Phi M_\sigma$, $\widetilde{N} = N/\Phi N_\sigma$, et notons X le noyau de $\widetilde{M} \to \widetilde{N}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & X & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & M_\sigma & \longrightarrow & N_\sigma & \longrightarrow & L_\sigma & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 \longrightarrow X & \longrightarrow & \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{N} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dont toutes les lignes et les colonnes sont exactes.

Comme $S_1 = k[[\tilde{\pi}]]$ et comme L est un S_1-module non nul de longueur finie, il existe un entier $d \geq 1$, des entiers $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_d \geq 1$ et des éléments $e_1, e_2, \ldots, e_d \in L$ tels que $\mathrm{Ann}(e_i) = (\tilde{\pi}^{r_i})$ et $L = \oplus_{1 \leq i \leq d} S_1 e_i$.

On a alors $L_\sigma = \oplus_{1 \leq i \leq d} S_1.1 \otimes e_i$ et on voit que l'annulateur de $1 \otimes e_i$ est $(\tilde{\pi}^{pr_i})$. En particulier $\pi^{r_1} \otimes e_1$ est un élément de X dont l'annulateur est $(\tilde{\pi}^{(p-1)r_1})$. On a donc dans $\widetilde{M}$ un élément qui n'est pas annulé par $\tilde{\pi}^{p-2}$, ce qui règle le cas où $M/\Phi(M_\sigma)$ est tué par π^{p-2}.

Dans le cas général, on remarque que tous les r_i doivent être égaux à 1. En outre, le noyau de $\Phi : L_\sigma \to L$, qui contient πL_σ, doit être πL_σ, car sinon il y aurait un élément de $\widetilde{M}$ qui ne serait pas annulé par π^{p-1}. On en déduit que Φ est surjective; comme L est annulé par π, cela revient à dire que, sur le φ-module L, φ est bijective. S i, pour tout i, on choisit un relèvement e_i' de e_i dans N, on voit que l'on peut écrire

$$\varphi e_i' = \sum a_{ij} e_j' + b_i,$$

où les $b_i \in M$ et la matrice des a_{ij} est une matrice carrée inversible à coefficients dans k.

Soit $\overline{M} = M/\pi M$; c'est un k-espace vectoriel de dimension finie que l'on peut considérer comme un φ-module sur k.

Si $\bar{b}_i$ désigne l'image de b_i dans $\overline{M}$, le système d'équations

$$\varphi \bar{x}_i - \sum a_{ij} \bar{x}_j = \bar{b}_i$$

a une solution dans k: en effet, si l'on choisit une base de $\overline{M}$ sur k, on obtient des équations étales (grâce au fait que la matrice des a_{ij} est inversible) qui ont une solution (puisque l'on a supposé k algébriquement clos).

Il est immédiat que l'on peut relever les $\bar{x}_i$ en des $x_i \in M$ de façon que

$$\varphi x_i - \sum a_{ij} x_j = b_i.$$

Autrement dit, quitte à remplacer e_i' par $e_i' - x_i$, on peut supposer que les b_i sont nuls. Mais alors, si on pose $e_i'' = \pi e_i'$, on voit que le sous-S_1-module M' de M engendré par les e_i'' est un facteur direct de M stable par φ, donc est un sous-objet strict de M. Comme

$$\varphi e_i'' = \pi^{p-1} \sum a_{ij} e_j'',$$

on a $\varphi(M_\sigma') = \pi^{p-1} M_\sigma'$. Donc, M' est un sous-objet strict, et *a fortiori* un sous-quotient strict, non nul vérifiant $\varphi(M_\sigma') = \pi^{p-1} M_\sigma'$ ce qui contredit (1.5.4) le fait que M est dans $\boldsymbol{\Phi M}_{S_1}^{p-1}(\pi)$ et non seulement dans $\boldsymbol{\Phi M}_{S_1}^{(p-1)^+}(\pi)$.

1.7.2. Le théorème précédent implique que, si M est un objet de $\boldsymbol{\Phi M}_S^+(q)$, admettant une filtration

$$M = M^0 \supset M^1 \supset \cdots M^i \supset M^{i+1} \supset \cdots$$

telle que $\cap M^i = 0$ et chaque M^i/M^{i+1} est un φ-module p-étale de q-hauteur $\leq p-1$, alors M est normal. En outre la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{\Phi M}_S^+(q)$ formée de tels M est abélienne. On en déduit en particulier la proposition suivante:

1.7.3. **Proposition**. *Soient $q \in S - pS$, $e(q)$ le plus grand entier $e \geq 0$ tel que $\tilde{\pi}^e$ divise l'image de q dans S_1 et $r \in \overline{\mathbb{N}}$ vérifiant $r.e(q) < (p-1)^+$. Alors, tout objet de $\boldsymbol{\Phi M}_S^r(q)$ est normal, la catégorie $\boldsymbol{\Phi M}_S^r(q)$ est abélienne, la restriction de j^* à $\boldsymbol{\Phi M}_S^r(q)$ est pleinement fidèle et induit* *une équivalence entre cette catégorie et* $\mathbf{\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(S,q)$*; la restriction de* j_* *est un quasi-inverse.*

1.8. *Représentations de hauteur finie*

1.8.1. Dans ce n°, on reprend les notations du §A2. On note en outre R l'anneau des entiers de $\widehat{\overline{E}}$; on écrit Fr R au lieu de $\widehat{\overline{E}}$. On a donc $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \subset W(\mathrm{Fr}\ R)$. On pose $R_0 = R^{G_E}$ et on note $\mathrm{Fr}\ R_0 = (\mathrm{Fr}\ R)^{G_E}$ son corps des fractions. On sait ([Ax70]) que Fr R_0 est le complété de la clôture radicielle de $E = k((\bar{\pi}))$ et que R_0 est l'anneau de ses entiers.

On pose aussi

$$A_S^+ = W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}} \subset W(\mathrm{Fr}\ R)$$
$$\text{et} \quad B_S^+ = A_S^+[1/p] = W_{K_0}(R) \cap \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \subset W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R).$$

Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module M et tout entier $n \geq 1$, on pose $M_n = M/p^nM$ et $M_\infty = \mathrm{lim.ind.}\ M_n = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes M$. En particulier, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},\infty} = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}/\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}$, $W(R)_\infty = W_{K_0}(R)/W(R)$ et $A^+_{S,\infty} = B_S^+/A_S^+$.

On choisit $q \in S - pS$ *tel que l'image de* q *dans* S_1 *est une uniformisante.*

1.8.2. Pour tout φ-module Λ sur S, on note $F_S(\Lambda)$ (resp. $\mathrm{Et}_q(\Lambda)$) l'ensemble des sous-S-modules de type fini de Λ, stables par φ, qui sont p-étales (resp. et de q-hauteur finie). On pose

$$j_*\Lambda = \cup_{N \in F_S(\Lambda)} N \quad \text{et} \quad j_*^q\Lambda = \cup_{U \in \mathrm{Et}_q(\Lambda)} N.$$

On a $j_*^q\Lambda \subset j_*N$, avec l'égalité si Λ est de p-torsion. Si Λ est séparé pour la topologie p-adique et sans p-torsion, $j_*^q(\Lambda[1/p]) = (j_*^q\Lambda)[1/p]$ et $j_*(\Lambda[1/p]) = (j_*\Lambda)[1/p]$. Si $\Lambda' \subset \Lambda$ et si $j_*\Lambda$ (resp. $j_*^q\Lambda$) $\subset \Lambda'$, alors $j_*\Lambda' = j_*\Lambda$ (resp. $j_*^q\Lambda' = j_*^q\Lambda$). Si Λ est une S-algèbre et si φ est un endomorphisme de la structure d'anneaux, $j_*^q\Lambda$ et $j_*\Lambda$ sont des sous-anneaux.

(a) *Propriétés de* A_S^+

1.8.3. **Proposition**. (i) *On a* $j_*(\mathrm{Fr}\ R) = E^{\mathrm{sép}} \cap R = \mathcal{O}_{E^{\mathrm{sép}}}$.

(ii) *Pour tout entier* $n \geq 1$, $j_*W_n(\mathrm{Fr}\ R) = A^+_{S,n}$;

(iii) *Les anneaux* $j_*^qW(\mathrm{Fr}\ R)$ *et* $j_*W(\mathrm{Fr}\ R)$ *sont contenus dans* A_S^+ *et denses dans* A_S^+.

(iv) *Pour tout* $n \geq 1$, $A^+_{S,n}$ *s'identifie à* $W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n} (\subset W_n(\mathrm{Fr}\ R))$.

1.8.4. **Lemme**. *Pour tout entier* $n \geq 1$, $j_*W_n(\mathrm{Fr}\ R) = W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}$ *et l'application naturelle* $j_*W_{n+1}(R) \to j_*W_n(R)$ *est surjective.*

Preuve. Soit $N \in F_S(W_n(\mathrm{Fr}\ R))$. On va commencer par montrer, successivement que $N \subset W_n(R)$, puis que $N \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}$ (ces deux assertions prouvant l'inclusion $j_* W_n(\mathrm{Fr}\ R) \subset W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}$) et qu'il existe $N' \in F_S(W_{n+1}(\mathrm{Fr}\ R))$ dont l'image dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ est N, ce qui prouvera la surjectivité.

Tout d'abord, $N + S_n.1 \in F_S(W_n(\mathrm{Fr}\ R))$. Le sous $W(R)$-module de $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ engendré par $N + S_n.1$ est un $W_n(R)$-module L de type fini stable par φ contenant $W_n(R)$; si $L \neq W_n(R)$, on pourrait trouver $x \in L$ de la forme $x = (0,0,\dots,0,c)$ avec $c \notin R$ et le sous-$W_n(R)$-module engendré par les $\varphi^m x = (0,0,\dots,0,c^{p^m})$ n'est pas de type fini, et on a bien $N \subset W_n(R)$.

Si $\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N$, l'inclusion de N dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ se prolonge en une application $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-linéaire ι commutant à φ de $\mathcal{N}$ dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-module de longue ur r, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(\mathcal{N}, W_n(\mathrm{Fr}\ R))$ est un groupe abélien fini d'ordre p^r [si $(e_j)_{1\leq j\leq d}$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{N}$ tels que $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}} e_j$, et si $p^{r_j}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est l'annulateur de e_j, on peut écrire

$$\Phi e_j = \sum a_{j,\ell} e_\ell, \quad \text{avec} \quad (a_{j,\ell}) \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}),$$

et on voit que l'ensemble des solutions, dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$, du système d'équations

$$p^{r_j} x_j = 0 \quad \text{et} \quad \Phi x_j = \sum a_{j,\ell} x_\ell, \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq d,$$

a exactement $p^{\sum r_j} = p^r$ éléments].

Mais p^r est aussi l'ordre de $\boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n})$; l'inclusion $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}) \subset \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(\mathcal{N}, W_n(\mathrm{Fr}\ R))$ est donc une égalité et $\iota \in \boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{N})$ donc $N \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}$.

D'après le théorème 1.6.1, il existe un objet M de $\boldsymbol{\Phi M}^+_S(q)$ sans torsion tel que N s'identifie au quotient de M par un sous objet strict M'.

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte courte de φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M' \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N \longrightarrow 0.$$

On a $\iota \in \boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S N)$. L'exactitude du foncteur $\boldsymbol{V}^*_{\mathcal{E}}$ implique que cette application se relève en un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M$ dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n+1}$. Son image est un φ-module N' quotient de M sans p'-torsion et c'est donc un objet de $\boldsymbol{\Phi M}^+_S(q)$ dont la réduction mod p^{n+1} est un élément de $\mathrm{Et}_q(W_{n+1}(\mathrm{Fr}\ R)) = F_S(W_{n+1}(\mathrm{Fr}\ R))$, dont l'image dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ est bien N.

Il ne reste plus qu'à montrer que l'inclusion $j_* W_n(\mathrm{Fr}\ R) \subset W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n}$ est une égalité et nous allons le faire par récurrence sur n.

Si $n = 1$, il s'agit de vérifier que $R \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},1} = \mathcal{O}_{E^{\mathrm{sép}}} \subset j_*(\mathrm{Fr}\ R)$. Mais $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\mathrm{sép}}} = \cup\, \mathcal{O}_L$, pour L parcourant les extensions finies séparables L de E et il suffit de vérifier que chaque $\mathcal{O}_L \in F_S(\mathrm{Fr}\ R)$. Mais, c'est un S_1-module libre de rang fini, l'application $x \otimes y \mapsto x^{p^{-1}} y$ définit un isomorphisme de $(\mathcal{O}_L)_\sigma$ sur un sous-anneau de $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_L)$ et $\Phi : (\mathcal{O}_L)_\sigma \to \mathcal{O}_L$ devient, via cet isomorphisme, le Frobenius usuel; comme il est injectif, $\mathcal{O}_L \in F_S(\mathrm{Fr}\ R)$.

Si maintenant $n \geq 2$, on a une suite exacte courte de S-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fr}\ R \longrightarrow W_n(\mathrm{Fr}\ R) \longrightarrow W_{n-1}(\mathrm{Fr}\ R) \longrightarrow 0$$

(où la première application est celle qui envoie x sur $(0, 0, \ldots, 0, x^{p^{n-1}}) = p^{n-1}\hat{x}$, $\hat{x}$ étant un relèvement quelconque de x dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & j_*\mathrm{Fr}\ R & \longrightarrow & j_*W_n(\mathrm{Fr}\ R) & \longrightarrow & j_*W_{n-1}(\mathrm{Fr}\ R) & \longrightarrow 0 \\
 & \| & & \downarrow & & \| & \\
0 \longrightarrow & \mathcal{O}_{E^{\mathrm{sép}}} & \longrightarrow & W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n} & \longrightarrow & W_{n-1}(R) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},n-1} &
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes; la flèche verticale du milieu est donc bien une égalité.

1.8.5. *Terminons la preuve* de la proposition 1.8.3.: Soit $N \in F_S(W(\mathrm{Fr}\ R))$. Pour tout n, son image dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ est contenue dans $j_*W_n(\mathrm{Fr}\ R) = W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n}$; il en résulte que $N \subset W(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}}$ donc que $j_*W(\mathrm{Fr}\ R)$, et *a fortiori* $j_*^q W(\mathrm{Fr}\ R)$ sont contenus dans A_S^+.

Par ailleurs, $A_S^+ \cap pW(\mathrm{Fr}\ R) = pA_S^+$ et $A_{S,n}^+$ s'envoie injectivement dans $W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n}$. Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que l'homomorphisme composé

$$j_*^q W(\mathrm{Fr}\ R) \longrightarrow A_S^+ \longrightarrow W_n(R) \cap \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},n} = j_*W_n(\mathrm{Fr}\ R)$$

est surjectif, ou encore qu'il existe $\overline{M} \in \mathrm{Et}_q(W(\mathrm{Fr}\ R))$ dont l'image dans $W_n(\mathrm{Fr}\ R)$ est N. Si l'on choisit M comme dans la démonstration du lemme ci-dessus, on voit que l'on peut trouver un homomorphisme de φ-modules $\hat{\iota} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M \to W(\mathrm{Fr}\ R)$ relevant ι. L'image $\overline{M}$ de M par $\hat{\iota}$ est un quotient de M sans torsion; c'est bien un élément de $\mathrm{Et}_q(W(\mathrm{Fr}\ R))$ qui relève N.

(b) *Représentations de p-torsion*

1.8.6. On a vu (1.4.2 et 1.5.3) que la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{tor}}$ (resp. $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p,\mathrm{tor}}$) de la catégorie des φ-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. p-étales sur S) formée des objets de p-torsion est une sous-catégorie de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(S, q)$ (resp. de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S}(q)$).

Rappelons (n° A1.2.7) que, le foncteur $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}^{*}$ qui à un tel φ-module M sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ associe

$$\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}^{*}(M) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},\infty})$$

induit une anti-équivalence entre $\boldsymbol{\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{tor}}$ et la catégorie $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}(G_E)$ des représentations de G_E de p-torsion, un quasi-inverse étant

$$\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}^{*}(V) = \operatorname{Hom}_{G_E}(V, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}},\infty}).$$

Pour tout objet M de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p,\mathrm{tor}}$, on pose

$$\boldsymbol{V}_{S}^{*}(M) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}_S}\left(M, A^{+}_{S,\infty}\right).$$

Il résulte de la proposition 1.8.3 que l'on a aussi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{S}^{*}(M) &= \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}_S}(M, W(R)_\infty)\\ &= \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}_S}(M, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}},\infty})\\ &= \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}_S}(M, W(\operatorname{Fr} R)_\infty).\end{aligned}$$

Pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}(G_E)$, on pose

$$\boldsymbol{D}_{S}^{*}(V) = \operatorname{Hom}_{G_E}\left(V, A^{+}_{S,\infty}\right).$$

Il est immédiat que $\boldsymbol{V}_S^{*}$ est un foncteur contravariant additif exact et fidèle de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p,\mathrm{tor}}$ dans $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}(G_E)$, qui s'identifie à $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}^{*} \circ j^{*}$ et que $\boldsymbol{D}_S^{*}$ est en foncteur contravariant additif pleinement fidèle (mais non exact) de $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}(G_E)$ dans $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p,\mathrm{tor}}$, qui s'identifie à $j_{*} \circ \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}^{*}$.

En particulier, si $r \in \mathbb{N}$ est tel que $r.e(q) \leq p-1$, $\boldsymbol{D}_S^{*}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie abélienne des φ-modules p-étales de torsion, de q-hauteur $\leq r$ et une sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations de G_E de p-torsion, stable par sous-objet et quotient.

(c) *Représentations $\mathbb{Q}_p$-adiques*

1.8.7. Posons $K_0 =$ Frac W et $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S = S[1/p]$.

Si M est un φ-module sur S, $M_{K_0} = K_0 \otimes_W M$ a une structure naturelle de φ-module sur S_{K_0}. Si M' et M'' sont deux φ-modules sur S, on a

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}\left(M'_{K_0}, M''_{K_0}\right) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{\Phi M}}(M', M'').$$

On note $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p}$ (resp. $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S}(q)$, $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}^{r}_{S}(q)$) la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-modules sur S_{K_0} formée des N tels qu'il existe un objet M de $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S,p}$ (resp. $\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S}(q)$, $\boldsymbol{\Phi M}^{r}_{S}(q)$) et un isomorphisme de M_{K_0} sur N. On définit la q-hauteur d'un objet de $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}^{+}_{S}(q)$ comme la plus petite des q-hauteurs des M tels que $M_{K_0} \simeq N$.

Si M est un objet de $\mathbf{Is\Phi M}^+_{S,p}$, $j^*(M) = \mathcal{E} \otimes_{S_{K_0}} M$ est un objet de $\mathbf{\Phi M}^0_{\mathcal{E}}$. On obtient ainsi un foncteur additif, exact et fidèle de $\mathbf{Is\Phi M}^+_{S,p}$ dans $\mathbf{\Phi M}^0_{\mathcal{E}}$.

Le foncteur j_* (resp. j^q_*) est un adjoint à droite de j^* (resp. de sa restriction à $\mathbf{Is\Phi M}^+_S(q)$).

1.8.8. Rappelons (A1.2.7) que le foncteur

$$\mathcal{M} \mapsto \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = \left\{x \in \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M} \mid \varphi x = x\right\}$$

induit une équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_E)$ et la catégorie $\mathbf{\Phi M}^0_{\mathcal{E}}$ des $\mathcal{E}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un Frobenius de pente 0, le foncteur $V \mapsto \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V) = (\widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_E}$ étant un quasi-inverse.

On dit qu'une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique de G_E est de *S-hauteur finie* (resp. de *q-hauteur finie*) si $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$ l'est, et, dans ce dernier cas, on appelle *q-hauteur* de V celle de $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}(V)$.

Pour tout objet M de $\mathbf{Is\Phi M}^+_{S,p}$, on pose

$$\boldsymbol{V}^*_S(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}\left(M, B^+_S\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}_S(M) = (\boldsymbol{V}^*_S(M))^* \,;$$

ce sont des objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_E)$. De même, pour toute représentation $\mathbb{Q}_p$-adique V de G_E, on pose

$$\boldsymbol{D}^*_S(V) = \mathrm{Hom}_{G_E}\left(M, B^+_S\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}_S(V) = \left(B^+_S \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_E} = \boldsymbol{D}^*_S(V^*)$$
$$\left(\text{resp.}\, \boldsymbol{D}^*_{S,q}(V) = \mathrm{Hom}_{G_E}\left(M, j^q_* W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ \ , R)\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}_{S,q}(V) = \boldsymbol{D}^*_{S,q}(V^*)\right) ;$$

ce sont des objets de $\mathbf{Is\Phi M}^+_{S,p}$ (resp. $\mathbf{Is\Phi M}^+_S(q)$).

La proposition suivante est immédiate:

1.8.9. **Proposition**. (i) *Pour tout objet M de $\mathbf{Is\Phi M}^+_{S,p}$, on a $\boldsymbol{V}^*_S(M) =$ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}(M, j_* W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}(M, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathrm{nr}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}(M, W_{K_0}(R)) =$ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}(M, W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R))$; si M est dans $\mathbf{Is\Phi M}^+_S(q)$, on a aussi $\boldsymbol{V}^*_S(M) =$ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Phi M}_S}(M, j^q_* W_{K_0}(\mathrm{Fr}\ R))$.*

(ii) *On a $\boldsymbol{V}_S = \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}} \circ j^*$, $\boldsymbol{D}_S = j_* \circ \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{D}_{S,q} = j^q_* \circ \boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$.*

(iii) *Pour toute représentation $\mathbb{Q}_p$-adique V de G_E, $\boldsymbol{D}_S(V)$ (resp. $\boldsymbol{D}_{S,q}(V)$) est un S_{K_0}-module libre de rang fini inférieur ou égal à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$; on a l'égalité si et seulement si V est de S-hauteur finie (resp. de q-hauteur finie).*

1.8.10. *Remarques.* (i) On a bien sûr des résultats plus précis lorsque l'on se restreint aux φ-modules ou aux représentations de q-hauteur $\leq r$. Remarquons en particulier que la proposition 1.7.3 montre que, si $r.e(q) \leq p-1$, la catégorie $\mathbf{Is\Phi M}^r_S(q)$ est abélienne et que $\boldsymbol{V}_S$ induit une équivalence entre cette catégorie et celle des représentations $\mathbb{Q}_p$-adiques de q-hauteur $\leq r$.

(ii) Si l'on suppose satisfaites les conditions de la proposition 1.5.6, et si en outre, on suppose qu'il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{q}$ de S, distinct de (π) et de (q), divisant $(\sigma\pi)$, il résulte facilement de cette proposition que la catégorie $\mathbf{Is\Phi M}_S^+(q)$ est abélienne, la restriction de j^* (resp. $\boldsymbol{V}_S$) à cette catégorie étant un foncteur pleinement fidèle induisant une équivalence entre cette catégorie et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Phi M}_{\mathcal{E}}^0$ dont les objets sont de q-hauteur finie (resp. la catégorie des représentations $\mathbb{Q}_p$-adiques de G_E de q-hauteur finie).

(d) *Le dictionnaire covariant*

1.8.11. Supposons maintenant *l'idéal* (π) de S *stable par* σ *et* $\sigma\pi \in (q)$.

Si M est un S-module sans π-torsion, $A_S^+ \otimes_S M$ s'identifie à un sous-A_S^+-module de $A_S^+[1/\pi] \otimes_S M$. Si M est un objet de $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$, on pose $\boldsymbol{V}_S(M) = \{x \in A_S^+[1/\pi] \otimes_S M \mid \exists\, r \in \mathbb{N}$ avec $\pi^r x \in A_S^+ \otimes_S M$ et $\varphi(\pi^r x) = (\sigma\pi)^r x\}$.

On voit que $\boldsymbol{V}_S$ est un foncteur exact et fidèle de $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_E)$.

1.8.12. **Proposition.** *Soit M un objet de $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$.*

(i) *Si M est de p-torsion, $\boldsymbol{V}_S^*(M)$ s'identifie à*

$$(\boldsymbol{V}_S(M))^* := Hom_{\mathbb{Z}_p}(\boldsymbol{V}_S(M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

(ii) *Le φ-module $M[1/p]$ est dans $\mathbf{Is\Phi M}_S^+(q)$ et*

$$\boldsymbol{V}_S(M[1/p]) = \boldsymbol{V}_S(M)[1/p].$$

Preuve. Soit $\mathcal{M} = j^*(M) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_S M$. Si M est de p-torsion, on voit que $\boldsymbol{V}_S(M)$ s'identifie à $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}(\mathcal{M})$ tandis que $\boldsymbol{V}_S^*(M)$ s'identifie à $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{M})$, dòu (i). L'assertion (ii) s'en déduit par passage à la limite.

1.8.13. Si V est une représentation de G_E de p-torsion, il existe M dans $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ tel que $V \simeq \boldsymbol{V}_S(M)$. On appelle *$q$-hauteur de V* la plus petite des q-hauteurs de tels M. Le théorème 1.6.1 implique le résultat suivant:

Théorème. *Toute représentation V de p-torsion de G_E est isomorphe à un sous-quotient d'une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique $\mathcal{V}$ de G_E q-hauteur finie. On peut choisir $\mathcal{V}$ de même q-hauteur que V.*

B2. *Les cas $e = 1$*

Dans ce paragraphe, on reprend les hypothèses et notations du paragraphe A3, avec $K = K_0$. On pose $\pi = \pi_0$, et on note E le corps $k((\tilde{\pi}))$.

Ceci nous permet de reprendre aussi les notations du paragraphe B1. On pourra vérifier qu'elles ne se contredisent pas.

En particulier, $S = W[\![\pi]\!] \subset W(R)$, $q = \pi + p$. Comme au §A3, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ($\subset W(\mathrm{Fr}\ R)$) le séparé complété pour la topologie p-adique de $S[1/q]$ et $\mathcal{E}$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. On pose $\Gamma = \Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. On pose aussi $S_K = S[1/p] = K \otimes_W S$.

2.1. *Les φ-Γ-modules de hauteur finie*

2.1.1. Soient A_1 et A_2 deux anneaux commutatifs. On suppose chacun d'eux munis d'un endomorphisme noté σ et d'une action de Γ commutant à celle de σ. Soit $\alpha : A_1 \to A_2$ un homomorphisme d'anneaux commutant à σ et à Γ. Si M est un φ-module sur A_1, on a défini au n° A.1.1.6, $\alpha^*(M) = A_2 \otimes_{A_1} M$ qui est un φ-module sur A_2; si M est un φ-Γ-module, l'action de Γ s'étend par semi-linéarité à $\alpha^*(M)$, ce qui fait que α^* peut aussi être considéré comme un foncteur covariant additif

$$\alpha^* : \mathbf{\Gamma\Phi M}_{A_1} \to \mathbf{\Gamma\Phi M}_{A_2}.$$

2.1.2. On note $j : S \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'inclusion et $i : S = W[\![\pi]\!] \to W$ la réduction mod π. Remarquons que i n'est autre que la restriction à S de l'homomorphisme $\theta_\epsilon : W[\![\pi_\epsilon]\!] \to W$, qui est l'unique homomorphisme de W-algèbres qui envoit $[\epsilon]$ sur 1. On voit que θ_ϵ, donc *a fortiori* i commute à l'action de φ et Γ (ce dernier groupe agissant trivialement sur W). Comme il en est de même de j, pour tout φ-Γ-module M sur S, $j^*(M)$ (resp. $i^*(M)$) a une structure de φ-Γ-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (resp. W).

Si M est un φ-Γ-module sur S, on dit que *l'action de* Γ *sur* M est *i-unipotente* si Γ opère trivialment sur $i^*(M)$.

2.1.3. Soit $S' = \varphi^{-1}(S) \subset W(R)$. L'application θ_ϵ se prolonge en un homomorphisme d'anneaux, commutant à G_K

$$\theta : S' \to K(\sqrt[p^\infty]{1}),$$

en envoyant $[\epsilon']$ sur $\epsilon^{(1)}$. On voit que le noyau de la restriction de $\theta' = \theta \circ \varphi^{-1}$ à S est l'idéal engendré par q, qui est donc aussi stable par Γ (mais pas par φ).

On note $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-Γ-modules sur S dont les objets sont p-étales, de q-hauteur finie et tels que l'action de Γ est i-unipotente et $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{S,\mathrm{tor}}^+$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ formée des objets de p-torsion. Ce sont des catégories additives $\mathbb{Z}_p$-linéaires.

On note $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$ la catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire déduite de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ "en rendant p inversible." On peut la voir aussi comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ-Γ-modules sur S_K formée des M tels qu'il existe un objet N de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ et un isomorphisme de $N_K = K \otimes_W N$ sur M.

2.1.4. Si M est un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$, on dit qu'un sous-$\varphi$-$\Gamma$-module de M (resp. un quotient) est *strict* si le φ-module sous-jacent l'est (cf. n°1.3.6).

On définit *la hauteur* $h(M) \in \overline{\mathbf{N}}$ d'un objet M de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ (resp. $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$) comme étant la q-hauteur du φ-module p-étale de q-hauteur finie sous-jacent (cf. n°1.5.2. et 1.8.7). On voit que, ici encore, si M est dans $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ et si $r \geq 0$ est le plus petit entier tel que q^r annule $M/\Phi(M_\sigma)$,

– si M n'a pas de quotient strict (dans la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$) non nul M'' tel que $\Phi(M''_\sigma) \subset q^r M''$, alors $h = r$;

– sinon $h = r^+$.

Pour tout $r \in \overline{\mathbf{N}}$, on note $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^r$ (resp. $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{S,\mathrm{tor}}^r$, resp $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^r$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ (resp. $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{S,\mathrm{tor}}^+$, resp. $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$) formée des objets de hauteur $\leq r$.

2.1.5. Pout tout φ-Γ-module Λ sur S, on note $F_{\mathrm{cr}}(\Lambda)$ (cr = cristallin) l'ensemble des sous-S-modules de type fini de Λ, stables par φ et Γ, qui sont des objets de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ et on pose

$$j_*^{\mathrm{cr}}\Lambda = \cup_{N \in F_{\mathrm{cr}}(\Lambda)} N.$$

Proposition. (i) *Pour tout objet M de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$, $j^*(M)$ est un φ-Γ-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Le foncteur*

$$j^* : \mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+ \to \mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$$

est exact et fidèle.

(ii) *Pour tout φ-Γ-module $\mathcal{N}$ étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, $j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{N}$ est un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$.*

(iii) *Les foncteurs j^* et j_*^{cr} sont adjoints.*

(iv) *Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$, $j^*j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est un monomorphisme. Si $\mathcal{N}$ est sans torsion, $j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{N}$ est un S-module libre de rang inférieur ou égal au rang de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et l'application $j^*j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ est un isomorphisme si et seulement si ces deux rangs sont égaux.*

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates du théorème 1.4.2, sauf peut-être le fait que, si $\mathcal{N}$ est sans torsion, alors $j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{N}$ est libre sur S. Pour cela, il suffit de remarquer que, si $N \in F_{\mathrm{cr}}(\mathcal{N})$, il existe $N' \in F_{\mathrm{cr}}(\mathcal{N})$ qui contient N et qui est libre. On a déjà vu au n°1.5.5 que si $\mathcal{N}' = \mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_S N$, al ors $N' = N[1/p] \cap \mathcal{N}'$ s'identifie à un sous- S-module libre de $\mathcal{N}$ contenant N, stable par φ et de q-hau teur finie. Il est clair que N' est stable par Γ, et il suffit de vérifier que l'action de Γ sur N' est i-unipotente. Si s est un entier tel que $p^s N' \subset N$, comme $i^*(N')$ est un W-module libre, la multiplication par p^s induit par passage au quotient, une application injective de $i^*(N')$ dans $i^*(N)$ et Γ opère trivialement sur $i^*(N')$.

2.1.6. On dit qu'un objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}^{\text{ét}}$ est *de* cr-*hauteur finie* s'il est dans l'image essentielle de j^* et on appelle alors cr-*hauteur* de $\mathcal{N}$ la plus petite des hauteurs des N dans $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ tels que $j^*N \simeq \mathcal{N}$. On note

$\mathbf{\Gamma\Phi M}^{+}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{cr}}$ (resp. $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{cr}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{\text{ét}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ formée des objets de cr-hauteur finie (resp. $\leq r$).

La catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{+}_{S}$ n'est pas abélienne, parce que l'application injective

$$N \to j_*^{\mathrm{cr}} \circ j^* N$$

n'est pas toujours un isomorphisme.

On a toutefois le résultat suivant:

2.1.7. **Proposition.** *Pour tout objet N de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{p-1}_{S}$, l'application $N \to j_*^{\mathrm{cr}} \circ j^* N$ est un isomorphisme. Pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$ vérifiant $r \leq p-1$, la catégorie $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{S}$ est abélienne, j^* induit une équivalence entre cette catégorie et $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{cr}}$ et la restriction de j_*^{cr} à $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{cr}}$ est un quasi-inverse. Si $\mathcal{N}$ est dans $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\mathrm{cr}}$, les inclusions naturelles $j_*^{\mathrm{cr}}(\mathcal{N}) \subset j_*^{q}(\mathcal{N}) \subset j_*(\mathcal{N})$ sont bijectives.*

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 1.7.3.

2.1.8. La situation est nettement plus agréable lorsque l'on travail à isogénie près. Rappelons (cf. A3.4.4) que l'on a noté $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{0}_{\mathcal{E}}$ la catégorie des φ-Γ-modules sur $\mathcal{E}$ de dimension finie sur $\mathcal{E}$ dont le φ-module sous-jacent est de pente 0.

Il est clair que la correspondance $M \mapsto j^*(M) = \mathcal{E} \otimes_{S_K} M$ définit un foncteur additif

$$j^* : \mathbf{Is\Gamma\Phi M}^{+}_{S} \to \mathbf{\Gamma\Phi M}^{0}_{\mathcal{E}},$$

et que j_*^{cr} définit un adjoint à droite.

On dit qu'un objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{0}_{\mathcal{E}}$ est *de* cr-*hauteur finie* si l'application

$$j^* j_*^{\mathrm{cr}}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$$

est un isomorphisme et on appelle alors cr-*hauteur de* $\mathcal{M}$ la hauteur de $j_*^{\mathrm{cr}}(\mathcal{M})$. On note $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{+}_{\mathcal{E},\mathrm{cr}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{0}_{\mathcal{E}}$ formée des objets de cr-hauteur finie et, pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$, $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{r}_{\mathcal{E},\mathrm{cr}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{+}_{\mathcal{E},\mathrm{cr}}$ formée des objets de cr-hauteur $\leq r$. Les catégories obtenues sont stables par somme-directe, sous-objet, quotient.

2.1.9. **Théorème.** (i) *Pour tout objet N de $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}^{+}_{S}$, l'application*

$$N \to j_*^{\mathrm{cr}} j^*(N)$$

est un isomorphisme.

(ii) *Pour tout objet $\mathcal{M}$ de $\mathbf{\Gamma\Phi M}^{0}_{\mathcal{E}}$, on a $\dim_{\mathcal{E}} j_*^{\mathrm{cr}}\mathcal{M} \leq \dim_{\mathcal{E}} \mathcal{M}$, avec l'égalité si et seulement si $\mathcal{M}$ est de* cr-*hauteur finie.*

(iii) *La catégorie $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}^{+}_{S}$ est abélienne et le foncteur*

$$j^* : \mathbf{Is\Gamma\Phi M}^{+}_{S} \to \mathbf{\Gamma\Phi M}^{+}_{\mathcal{E},\mathrm{cr}}$$

est pleinement fidèle et induit une équivalence entre ces deux catégories. La restriction de j_*^{cr} *à* $\mathbf{\Gamma\Phi M}^+_{\mathcal{E},\mathrm{cr}}$ *est un quasi-inverse.*

Preuve. Compte-tenu de ce que l'on sait déjà, la seule chose à prouver est (i). Posons $M = j_*^{\mathrm{cr}} j^*(N)$; l'application $N \to M$ est injective et nous notons M'' le conoyau.

On a vu au n°2.1.2 que l'idéal de S engendré par π est stable par σ. Avec les notations du n°2.1.3, on voit que $\theta'(\sigma\pi) = \theta(\pi) = i(\pi) = 0$, donc que $\sigma\pi$ appartient au noyau de θ' qui est l'idéal engendré par q. On peut donc appliquer la proposition 1.5.6 et il existe un entier r tel que π^r annule M''.

On se convainc facilement qu'il existe un caractère, *d'ordre infini*

$$\eta : \Gamma \to W^*$$

tel que, pour tout $g \in \Gamma$, $g(\pi) \equiv \eta(g).\pi \pmod{\pi^2}$ (en fait η est la puissance $(p-1)$-ième du caractère cyclotomique).

Pour tout S-module Λ, $i^*(\Lambda) = \Lambda/\pi\Lambda$ et la suite exacte

$$0 \to N \to M \to M'' \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to M''_\pi(\eta) \to i^*(N) \to i^*(M) \to M''/\pi M'' \to 0,$$

compatible avec l'action de Γ. Par hypothèse, l'action de Γ est triviale sur $i^*(N)$ et $i^*(M)$. Elle doit donc l'être aussi sur $M''/\pi M''$ et se fait via η^{-1} sur M''_π. Si celui-ci n'était pas nul, on aurait Ann $(M'') = (\pi^r)$, avec r un entier ≥ 1. La multiplication par π^{r-1} induirait alors une application non nulle

$$(M''/\pi M'')\left(\eta^{r-1}\right) \to M''_\pi;$$

mais c'est impossible puisque Γ agit sur le premier K-espace vectoriel via η^{r-1} et via η^{-1} sur le second.

2.2. *Représentations de* G_K *de* cr-*hauteur finie*

(a) *Représentations* $\mathbb{Q}_p$*-adiques*

2.2.1. Si M est un objet de $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}^+_S$, les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\boldsymbol{V}_S(M)$ et $\boldsymbol{V}^*_S(M)$ définis au n° 1.8.8 sont munis d'une action naturelle de G_K. De même, si V est une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique de G_K,

$$\boldsymbol{D}_{S,\mathrm{cr}}(V) = j_*^{\mathrm{cr}}\boldsymbol{D}_S(V) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}^*_{S,\mathrm{cr}}(V) = j_*^{\mathrm{cr}}\boldsymbol{D}^*_S(V)$$

sont des objets de $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}^+_S$.

Disons qu'une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique V de G_K est *de* cr-*hauteur finie* s'il existe M dans $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}^+_S$ tel que $V \simeq \boldsymbol{V}_S(M)$. Ces représentations forment une sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, stable par sous-objet, quotient, somme-directe, produit tensoriel.

La proposition suivante résulte de la proposition 1.8.9 et du théorème 2.1.9:

2.2.2. **Proposition.** (i) *Pour toute représentation $\mathbb{Q}_p$-adique V de G_K, $\boldsymbol{D}_{S,\mathrm{cr}}(V)$ est un S_K-module libre de rang fini inférieur ou égal à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$; on a l'égalité si et seulement si V est de* cr*-hauteur finie.*

(ii) *Le foncteur*

$$\boldsymbol{V}_S : \mathbf{Is\Gamma\Phi}\boldsymbol{M}^+_S \to \mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$$

est pleinement fidèle et induit une équivalence entre ces deux catégories, la restriction du foncteur $\boldsymbol{D}_{S,\mathrm{cr}}$ à $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$ en étant un quasi-inverse.

Si V est une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique de G_K, de cr-hauteur finie, on appelle cr-*hauteur de* V la cr-hauteur de $\boldsymbol{D}_{S,\mathrm{cr}}(V)$. Pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$, on note $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$ formée des V de cr-hauteur $\leq r$.

(b) *Représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques*

2.2.3. Les résultats du n°1.8 ont une traduction évidente en termes de représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_K et de φ-Γ-modules. Contentons-nous de remarquer que, si M est un objet de $\mathbf{\Gamma\Phi}\boldsymbol{M}^+_S$ (resp. et de p-torsion), le $\mathbb{Z}_p$-module $\boldsymbol{V}_S(M)$ (resp. $\boldsymbol{V}^*_S(M)$) défini au n°1.8.11 (resp. 1.8.6) a une structure naturelle d'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$.

Disons qu'une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V de G_K est *de* cr-*hauteur finie* si elle est isomorphe à un sous-quotient d'une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique $\mathcal{V}$ de G_K de cr-hauteur finie et appelons alors cr-*hauteur de* V le plus petit $r \in \overline{\mathbb{N}}$ tel que l'on puisse choisir $\mathcal{V}$ de hauteur r. Notons $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ formée des V de cr-hauteur finie (resp. $\leq r$).

La proposition suivante résulte facilement des n°s 1.8.10, 1.8.12 et 2.1.7:

2.2.4. **Proposition.** *Soit $r \in \overline{\mathbb{N}}$ vérifiant $r \leq p-1$. La restriction du foncteur $\boldsymbol{V}_S$ induit une équivalence entre les catégories $\mathbf{\Phi\Gamma}\boldsymbol{M}^r_S$ et $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cr}}(G_K)$.*

2.3. *Le lien avec les représentations cristallines* (résultats et questions)

2.3.1. Appelons (cf. [FL82], Section 1) *φ-module filtré positif sur W* la donnée d'un W-module D muni

– d'une part, d'une filtration décroissante $(F^i_pD)_{i\in\mathbb{N}}$, par des sous-$W$-modules, vérifiant $F^0_pD = D$ et $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F^i_pD = 0$;

– d'autre part, d'une famille

$$\varphi_p^i : F_p^i D \to D$$

d'applications σ-semi-linéaires vérifiant $\varphi_p^i(x) = p.\varphi_p^{i+1}(x)$, pour tout $x \in F_p^{i+1}D$.

Ces φ-modules filtrés positifs sur W forment, de manière évidente, une catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire que nous notons $\boldsymbol{MF}_W^+$.

Notons $\boldsymbol{MF}_W^{f,+}$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{MF}_W^+$ formée des D tels que le W-module sous-jacent est de type fini, les F_p^iD sont des facteurs directs et $D = \sum \varphi_p^i(F_p^iD)$. C'est une catégorie abélienne (*op cit.*, prop. 1.8).

Notons $\boldsymbol{MF}_K^+$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{MF}_W^+$ formée des D tels que les F_p^iD sont des K-espaces vectoriels (les φ_p^i sont alors déterminés par $\varphi = \varphi_p^0$, via $\varphi_p^i(x) = p^{-i}\varphi x$). C'est une catégorie additive $\mathbb{Q}_p$-linéaire et la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$ formée des D que l'on peut obtenir, par extension des scalaires de W à K, à partir des objets de $\boldsymbol{MF}_W^{f,+}$ est abélienne.

Pour tout objet D de $\boldsymbol{MF}_W^{f,+}$ (resp. $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$), on appelle *hauteur de* D l'élément de $\overline{\mathbb{N}}$ ainsi défini: soit r le plus petit entier ≥ 0 tel que $F_p^{r+1}D = 0$; si D n'a pas de quotient non nul D' tel que $F_p^rD' = D'$, alors la hauteur de D est r; sinon, c'est r^+.

Pour tout $r \in \overline{\mathbb{N}}$, on note $\boldsymbol{MF}_W^{f,r}$ (resp. $\boldsymbol{MF}_K^{f,r}$) la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{MF}_W^{f,+}$ (resp. $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$) formée des D de hauteur $\leq r$.

2.3.2 Si C désigne le complété de $\overline{K}$, on dispose d'un homomorphisme continu surjectif de W-algèbres

$$\theta : W(R) \to \mathcal{O}_C :$$

c'est celui qui à $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ associe $\sum p^n x_n^{(n)}$. Notons A_{cris} l'anneau (souvent noté $W^{DP}(R)$, cf. [Fo83a], n°3.6) qui est le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à l'idéal Ker θ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Fil}^i A_{\text{cris}}$ l'adhérence de la i-éme puissance divisée du *pd*-idéal correspondant. L'anneau A_{cris} est sans p-torsion et s'identifie à un sous-anneau de $B_{\text{cris}}^+ = K \otimes_W A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}[1/p]$. L'action de G_K et celle de φ s'étendent de manière naturelle à A_{cris} et à B_{cris}^+. On munit alors A_{cris} (resp. B_{cris}^+) d'une structure d'objet de MF_W^+ (resp. MF_K^+), compatible avec l'action de G_K, en posant $F_p^iA_{\text{cris}} = \{x \in \mathrm{Fil}^iA_{\text{cris}} \mid \varphi x \in p^iA_{\text{cris}}\}$ et $F_p^iB_{\text{cris}}^+ = K \otimes_W \mathrm{Fil}^iA_{\text{cris}}$.

2.3.3. Pour toute représentation $\mathbb{Q}_p$-adique V de G_K, posons

$$\boldsymbol{D}_{\text{cris}}^+(V) = \left(B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right)^{G_K} ;$$

rappelons ([Fo83b], §5) que c'est un K-espace vectoriel de dimension finie, inférieure ou égale à la dimension de V sur Q_p, muni d'une structure naturelle d'objet de $\boldsymbol{MF}_K^+$. Nous disons que V est *cristalline positive* si ces deux dimensions sont égales. Notons $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ la sous catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ formée des représentations cristallines positives.

Alors (*loc. cit.*), $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ est stable par sous-objet, quotient, $\oplus$, $\otimes$. Par restriction, $\boldsymbol{D}^+_{\mathrm{cris}}$ induit une équivalence entre $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ et une sous-catégorie pleine $\boldsymbol{MF}_K^{\mathrm{ad},+}$ de $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$, stable par sous-objet, quotient, $\oplus$, $\otimes$, dont les objets sont appelés les *φ-modules filtrés admissibles sur K*. La correspondance

$$D \mapsto \boldsymbol{V}_{\mathrm{cris}}(D) = \left\{x \in F_p^0\left(B_{\mathrm{cris}} \otimes D\right) \mid \varphi x = x\right\}$$

(où B_{cris} peut-être défini comme l'anneau obtenu à partir de B^+_{cris} en rendant π inversible) est un quasi-inverse.

Si V est dans $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$, appelons *hauteur cristalline de V* la hauteur de $\boldsymbol{D}^+_{\mathrm{cris}}(V)$. De même, disons qu'une représentation $\mathbb{Z}_p$-adique V de G_K est *de hauteur cristalline finie* si elle est isomorphe à un sous-quotient d'une représentation $\mathbb{Q}_p$-adique cristalline positive $\mathcal{V}$ et appelons alors *hauteur cristalline de V* la plus petite des hauteurs cristallines de tels $\mathcal{V}$. Pour tout $r \in \overline{N}$, on note $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}^+_{\mathbb{Q}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$) formée des V de hauteur cristalline $\leq r$.

2.3.4. Rappelons enfin que l'on conjecture que tout objet de $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$ est admissible et que l'on sait que c'est vrai pour tout objet de $\boldsymbol{MF}_K^{f,p-1}$. Cela résulte de la proposition suivante, essentiellement contenue dans ([FL82] thm. 3.3 et 6.1):

Proposition. *Soit $r \leq p-1$. Pour tout objet D de $\boldsymbol{MF}_W^{f,r}$,*

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{cris}}(D) = \left\{x \in F_p^r\left(A_{\mathrm{cris}} \otimes_W D\right) \mid \varphi_p^r(x) = x\right\}(-r)$$

(où $(-r)$ désigne la "torsion à la Tate" usuelle) *est un objet de $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$. La correspondance $D \mapsto \boldsymbol{V}_{\mathrm{cris}}(D)$ induit une équivalence entre $\boldsymbol{MF}_W^{f,r}$ et $\mathbf{Rep}^r_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris}}(G_K)$.*

2.3.5. Soit M un objet de $\boldsymbol{\Phi M}_S^+(q)$ (resp. $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}_S^+(q)$). Alors $D = i^*(M) = M/\pi M$ a une structure naturelle d'objet de $\boldsymbol{MF}_W^+$ (resp. $\boldsymbol{MF}_K^+$): pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit $F_p^i D$ comme étant l'image du sous-S-module $F_q^i M$ formé des $\hat{x}$ tels que $\varphi\hat{x} \in q^i M$ (*attention*: il faut prendre l'image de $F_q^i M$ et non l'image du sous-S-module $F_q^i M_\sigma$ de M_σ défini au n°1.6.2); si $x \in F_p^i D$ est l'image de $\hat{x} \in F_q^i M$, on définit $\varphi_p^i(x)$ comme étant l'image de $q^{-i}\varphi\hat{x}$ (il est immédiat que c'est indépendant du choix du relèvement; comme $q \equiv p \pmod{\pi}$, on a bien $\varphi_p^i(x) = p\varphi_p^{i+1}(x)$ si $x \in F_p^{i+1}D$).

Il est clair que l'on peut considérer i^* comme un foncteur additif exact, de $\mathbf{\Phi M}_S^+(q)$ (resp. $\mathbf{Is\Phi M}_S^+(q)$) dans $\boldsymbol{MF}_W^+$ (resp. $\boldsymbol{MF}_K^+$).

2.3.6. En composant avec le foncteur "oubli de l'action de Γ" on obtient une recette fonctorielle pour associer un φ-module filtré sur W (resp. sur K) à tout objet de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+$ (resp. $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$). Dans la deuxième partie de ce travail, nous prouverons le résultat suivant:

Théorème. (i) *Pour tout objet M de $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$, $i^*(M)$ est un objet de $\boldsymbol{MF}_K^{\mathrm{ad},+}$ et la hauteur de $i^*(M)$ est égale à celle de M.*

(ii) *Le foncteur*

$$i^* : \mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+ \to \boldsymbol{MF}_K^{\mathrm{ad},+}$$

est pleinement fidèle et induit une équivalence entre $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$ et une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{MF}_K^{\mathrm{ad},+}$ stable par sous-objet et quotient.

(iii) *Les foncteurs*

$$\boldsymbol{V}_S, \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}} \circ j^* \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{cris}} \circ i^* : \mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+ \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$$

sont naturellement équivalents.

En particulier, toute représentation $\mathbb{Q}_p$-adique de cr-hauteur finie est de hauteur cristalline finie (et la cr-hauteur de cette représentation est égale à sa hauteur cristalline).

Il ne me paraît pas très difficile de prouver et il me semble donc raisonnable de *conjecturer que la réciproque est vraie*, autrement dit que le foncteur

$$i^* : \mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+ \to \boldsymbol{MF}_K^{\mathrm{ad},+}$$

est essentiellement surjectif.

Pour prouver simultanément cette conjecture et celle qui affirme que tout objet de $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$ est admissible, il suffirait de vérifier que tout objet de $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$ est dans l'image essentielle de i^*.

2.3.7. Comme on le verra dans la deuxième partie de ce travail, on dispose de résultats partiels dans cette direction (qui donnent en outre une autre démonstration des résultats de [FL82]):

Proposition. (i) *Pour tout objet D de $\boldsymbol{MF}_K^{f,p-1}$ il existe M dans $\mathbf{Is\Gamma\Phi M}_S^+$ tel que $D \simeq i^*(M)$.*

(ii) *Pour tout objet M de $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^{p-1}$, $i^*(M)$ est un objet de $\boldsymbol{MF}_W^{f,p-1}$, dont la hauteur est égale à celle de M; en outre i^* induit une équivalence entre $\mathbf{\Gamma\Phi M}_S^{p-1}$ et $\boldsymbol{MF}_W^{f,p-1}$. Les foncteurs*

$$\boldsymbol{V}_S, \boldsymbol{V}_{\mathcal{E}} \circ j^* \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{cris}} \circ i^* : \mathbf{\Gamma\Phi M}_S^+ \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$$

sont naturellement équivalents.

Principales notations

0

0.1: $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(G)$, $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}(G)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbf{F}_p}(G)$.

0.2: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $W_n(A)$, $W(A)$, $[a]$, φ, σ.

A

1.1: M_σ, $\boldsymbol{\Phi M}_{A,\sigma} = \boldsymbol{\Phi M}_A = \boldsymbol{\Phi M}$, $A_\sigma[\varphi]$, A_σ, $\boldsymbol{\Phi M}_A^{\text{ét}}$.

1.2 E^{rad}, $E^{(n)}$, $E^{\text{sép}}$, G_E, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\text{nr}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}$, $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{D}_{\mathcal{E}}^*$, $\boldsymbol{V}_{\mathcal{E}}^*$, $\boldsymbol{\Phi M}_{\mathcal{E}}^0$.

2.0: k, W, K_0, K.

2.3: N_φ, T_φ, Col.

2.4: δ_ϵ, $[x,u)$.

3.0: $\overline{K}$, G_L, C.

3.1: R, χ, E_0, $\widetilde{S}_0$.

3.2: $W_A(R)$, π_ϵ, S_0, $\mathcal{E}_0$, π_0.

3.3: $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_A$, $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_A^{\text{ét}}$, S, H, Γ.

3.4: $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{E}}^0$.

B

1.3: $\boldsymbol{\Phi M}_{S,p}^+$.

1.4: j^*, j_*, $\boldsymbol{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^+(S)$.

1.5: $\overline{\mathbf{N}}$, $\boldsymbol{\Phi M}_S^+(q)$, $\boldsymbol{\Phi M}_S^r(q)$, $\boldsymbol{\Phi M}_{S,\text{tor}}^r(q)$, j_*^q, $\boldsymbol{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^+(S,q)$, $\boldsymbol{\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^r(S,q)$.

1.6: $F_q^i M_\sigma$, $C_i^q M$, Car.

1.7: $e(q)$.

1.8: A_S^+, B_S^+, A_∞, $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Phi M}$, $\boldsymbol{V}_S$, $\boldsymbol{D}_S$, $\boldsymbol{D}_{S,q}$, $\boldsymbol{V}_S^*$, $\boldsymbol{D}_S^*$, $\boldsymbol{D}_{S,q}^*$.

2.1: $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Gamma\Phi M}$, $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_S^+$, $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_{S,\text{tor}}^+$, $\mathbf{Is}\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_S^+$, j_*^{cr}, $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}},\text{cr}}^+$, $\boldsymbol{\Gamma\Phi M}_{\mathcal{E},\text{cr}}^+$.

2.2: $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p,\text{cr}}^+(G_K)$, $\mathbf{Rep}_{p\text{-tor, cr}}^+(G_K)$, $\boldsymbol{D}_{S,\text{cr}}^*$.

2.3: A_{cris}, $A_{\text{cris},\infty}$, B_{cris}^+, $\boldsymbol{MF}_W^{f,+}$, $\boldsymbol{MF}_K^{f,+}$, $\boldsymbol{MF}_K^{\text{ad},+}$, $\text{Rep}_{\text{cris}}^+(G_k)$,
$\mathbf{Rep}_{p\text{-tor}}^r(G_K)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ab89] Abraskin, V. A., *Ramification in étale cohomology*, manuscrit, 1989.

[Ax70] Ax, J., *Zeros of polynomials over local fields. The Galois action*, J. Algebra **15** (1970), 417-428.

[BK89] Bloch S., and Kato, K., *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, preprint, 1989.

[Bu88] *Séminaire sur les périodes p-adiques*, IHES, Bures-sur-Yvette, 1988, en préparation.

[Co79] Coleman, R., *Division values in local fields*, Inv. Math **53** (1979), 91-116.

[C082] Coleman, R., *Dilogarithms, regulators and p-adic Abelian integrals*, Inv. Math **69** (1982), 171-208.

[Co85] Coleman, R., *Torsion points on curves and p-adic Abelian integrals*, Ann. of Math. **121** (1985), 111-168.

[Co87] Coleman, R., *letter to B. Mazur*, March 1987.

[De72] Demazure, M., *Lectures on p-divisible groups*, Lecture Notes in Math. **302**, Springer, Berlin, 1972.

[DM82] Deligne, P. and Milne, J. S., *Tannakian categories*, in *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Math. **900**, Springer, Berlin, 1982, 101-228.

[Fa88a] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, preprint 1988.

[Fa88b] Faltings, G., *F-isocrystals on open varieties, results and conjectures*, preprint 1988.

[Fo77] Fontaine, J.-M., *Groupes p- divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, 47-58. Soc. Math. de France, Paris, 1977

[Fo83a] Fontaine, J.-M., *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, in *Algebraic Geometry Tokyo-Kyoto*, Lecture Notes in Math. **1016**, Springer, Berlin, 1983, 86-108.

[Fo83b] Fontaine, J.-M., *Représentations p-adiques*, Proc. Int. Congress Math., (1983), Warsaw, 475-486.

[FL82] Fontaine, J.-M. and Laffaille, G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Scient. E.N.S., 4° série, **15** (1982), 547- 608.

[FM87] Fontaine, J.-M. and Messing, W., *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179-207.

[FW79] Fontaine, J.-M. and Wintenberger, J.-P., *Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux*, C.R.A.S. **288** (1979), 367-370.

[Gr70] Grothendieck A., *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*, Actes Congrès Int. Math. Nice 1970, t.1, Gauthiers-Villars, Paris, 1971.

[Ka89] Kato, K., *The explicit reciprocity law and the cohomology of Fontaine-Messing*, Bull. Soc. Math. France. à paraître.

[La78] Lang, S., *Cyclotomic Fields.* Springer, Berlin, 1978.

[Sa72] Saavedra Rivano, N., *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Maths **265**. Springer, Berlin, 1972.

[Sen80] Sen, S., *Continuous cohomology and p-adic Galois representations*, Inv. Math. **62** (1980), 89-116.

[Se58] Serre, J.-P., *Classe des corps cyclotomiques*, Séminaire Bourbaki, exp. 174, (1958), Benjamin, New York, 1966.

[Se68] Serre, J.-P., *Corps locaux,*, 2°éd., Hermann, Paris, 1968.

[Wi83] Wintenberger, J.-P., *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; applications*, Ann. Sci. E.N.S. **16** (1983), 59-89.

[Wit37] Witt, E., *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Characteristik p (sic)*, J. reine ang. Math. **176** (1937), 126-140.

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Département de Mathématiques - Bât. 425
91405 Orsay Cedex, France