Invent. math. 65, 379–409 (1982)

Inventiones mathematicae

Formes Différentielles et Modules de Tate des Variétés Abéliennes sur les Corps Locaux

Jean-Marc Fontaine

Laboratoire de Mathématiques Pures associé au C.N.R.S., Institut Fourier, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B.P. 116, F-38402 Saint-Martin d'Hères, France

Introduction

0.1. Soit K un corps local de caractéristique 0, à corps résiduel parfait de caractéristique $p \neq 0$, soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et soit C le complété de $\bar{K}$. L'action de $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ se prolonge par continuité à C.

Soit $T = \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \boldsymbol{\mu}_{p^n}(\bar{K})$ (où $\boldsymbol{\mu}_{p^n}(\bar{K})$ est le groupe des racines de l'unité de $\bar{K}$ d'ordre divisible par p^n, l'application de transition étant l'élévation à la puissance p-ième). C'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang 1 sur lequel G opère linéairement et continûment. Pour tout $\mathbf{Z}_p$-module M, muni d'une action linéaire de G, et pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose

$$M(i) = M \otimes_{\mathbf{Z}_p} T^{\otimes i}$$

(avec la convention que $T^{\otimes 0} = \mathbf{Z}_p$ et que, si $j > 0$, $T^{\otimes -j}$ est le dual de $T^{\otimes j}$).

Si V est une «représentation p-adique», i.e. un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie avec action linéaire et continue de G, on sait ([7], prop. 4) que $\sum_{i \in \mathbf{Z}} \dim_K (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)(i))^G \leq \dim_{\mathbf{Q}_p} V$; on dit que V est de Hodge-Tate, si on a l'égalité.

0.2. Si X est une variété projective non singulière définie sur K, une conjecture de Tate affirme que la cohomologie étale p-adique de $X \times \bar{K}$ est de Hodge-Tate. Lorsque X est une variété abélienne, cette conjecture a été demontrée par Tate dans le cas où X a bonne réduction et par Raynaud dans le cas général: c'est une conséquence du travail de Tate sur les groupes p-divisibles [9] et du théorème de réduction semi-stable ([10], Exposé 9, th. 3.6 et prop. 5.6).

0.3. Si $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_{\bar{K}}$) est l'anneau des entiers de K (resp. $\bar{K}$), le module $\Omega = \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ des $\mathcal{O}_K$-différentielles (de Kähler) de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de torsion, muni d'une action semi-linéaire de G, dont la structure est très simple: l'application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\xi\colon\ \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\bar{K}) \to \Omega$$

qui à $\alpha \otimes \varepsilon$ associe $\alpha \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ est surjective; si b désigne un générateur de la différente absolue de K et si ε_1 est une racine primitive p-ième de l'unité, le noyau de ξ est formé des éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\bar{K})$ annulés par $(\varepsilon_1 - 1) \cdot b$. Par passage à la limite, ξ nous permet d'identifier $C(1)$ et $V_p(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \Omega)$.

Ces résultats sont des cas particuliers de résultats plus généraux, de nature entièrement élémentaire, qui font l'objet des §1 et 2.

0.4. Dans le §3, on en donne une application à une nouvelle démonstration du théorème de Tate et Raynaud; celle-ci a l'avantage de n'utiliser ni la notion de groupe p-divisible, ni celle de modèle de Néron et encore moins le théorème de réduction semi-stable. L'idée en est très simple: soit X une variété abélienne sur K et soit $T_p(X) = \varprojlim X_{p^n}(\bar{K})$ son module de Tate; il est bien connu que tout revient à montrer l'existence d'une application K-linéaire injective de $H^0(X, \Omega_X^1)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C(1))$; choisissons un prolongement propre $\mathscr{X}$ de X sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$; on dispose d'un accouplement

$$H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}}^1) \times X(\bar{K}) \to \Omega:$$

c'est celui qui, à (ω, u), avec $\omega \in H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}}^1)$ et $u \in X(\bar{K})$ identifié à $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, associe l'image réciproque $u^*(\omega)$ de ω par u; l'application K-linéaire cherchée s'en déduit, par passage à la limite et extension des scalaires, en utilisant l'identification de $V_p(\Omega)$ à $C(1)$.

0.5. Dans le §4, on montre que, si J est un schéma en groupes commutatif, fini et plat, de rang une puissance de p, sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, on a «presque» une décomposition canonique de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ en somme directe de deux $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-modules (qui généralise la décomposition de Hodge-Tate du module de Tate des groupes p-divisibles). De façon précise, si B' désigne l'algèbre affine du dual de Cartier de J, on sait que $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ s'identifie à un sous-groupe du groupe multiplicatif de l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$; l'application, qui à $u \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ associe la différentielle logarithmique $\frac{du}{u} \in \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')$, induit, par extension des scalaires, une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\varphi_J\colon\ \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'),$$

dont le noyau est tué par un élément $a \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$, non nul, indépendant de J (avec les notations du n° 0.3, on peut prendre $a = (\varepsilon_1 - 1) \cdot b$). Comme

$$\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') = (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')) \oplus (\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B'),$$

ceci fournit la «presque-décomposition» annoncée. On peut «presque» décrire l'image de φ_J, i.e. exhiber un sous-$\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathrm{B}')$ qui contient l'image de φ_J et est tel que le conoyau est tué par a. On peut aussi expliquer comment les applications φ_J et $\varphi_{J'}$ sont liées (où J' est le dual de Cartier de J).

0.6. Dans le §5 enfin, on retrouve de deux manières différentes la décomposition de Hodge-Tate de $C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H)$, où $T_p(H)$ est le module de Tate d'un groupe p-divisible H sur $\mathcal{O}_K$:

- d'une part, en transposant aux groupes p-divisibles ce qui a été fait au §3 pour les variétés abéliennes;
- d'autre part, par passage à la limite, à partir de ce qui a été fait au §4 pour les schémas en groupes finis.

L'intérêt de cette dernière construction est que (contrairement à la première et à la construction originale de Tate) elle fournit une décomposition a priori de $C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H)$ en somme directe de deux sous-C-espaces vectoriels stables par G. Comme on connaît l'action de G sur chacun d'eux, les résultats généraux de la théorie de Hodge-Tate permettent ensuite de dire que la décomposition fabriquée est celle de Hodge-Tate.

A l'origine de ce travail, il y a de nombreuses discussions avec Bill Messing et cet article lui doit beaucoup; je voudrais l'en remercier ici[1]; le §4 a pour origine une question de Jean-Pierre Wintenberger que je remercie également.

§1. Le Module des Différentielles

1.1. Dans ce paragraphe et dans le suivant, K est un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$, K_s est une clôture séparable de K, $G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$, C le complété de K_s (sur lequel G opère par continuité).

On suppose donnés un sous-corps K_0 de K tel que l'extension K/K_0 soit finie séparable, totalement ramifiée, et un sous-corps fermé E de K_0, contenant une uniformisante π de K_0, à corps résiduel k_E fini.

On est donc dans l'une des deux situations suivantes:

- ou bien K est de caractéristique 0, donc contient $\mathbf{Q}_p$, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, K_0 est le sous-corps de K obtenu en adjoignant une uniformisante de E au corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans k;
- ou bien K est de caractéristique p, $E = k_E((\pi))$, $K_0 = k((\pi))$.

1.2. On note v la valuation de C normalisée par $v(\pi) = 1$ et, pour tout sous-corps L de C, $\mathcal{O}_L$ le sous-anneau de L formé des éléments de valuation $\geqq 0$; pour tout sous-$\mathcal{O}_L$-module $\mathfrak{a}$ de L, libre de rang 1, (en particulier, pour tout idéal principal de $\mathcal{O}_L$), on note $v(\mathfrak{a})$ la valuation d'un générateur quelconque de $\mathfrak{a}$ (noter que $v(\mathfrak{a})$ détermine $\mathfrak{a}$).

1.3. On se donne un groupe formel de Lubin-Tate, Γ, pour E. Rappelons ([4] ou [1], chap. VI, §3) que $\Gamma(X, Y) \in \mathcal{O}_E[[X, Y]]$ est une loi de groupe formel à 1 paramètre telle que l'application $\sum_{i=1}^{\infty} c_i X^i \mapsto c_1$ induise un isomorphisme de $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(\Gamma)$ sur $\mathcal{O}_E$. L'ensemble $\Gamma(\mathcal{O}_{K_s})$ des homomorphismes continus (de $\mathcal{O}_E$-algèbres) de $\mathcal{O}_E[[X]]$ dans $\mathcal{O}_{K_s}$ a alors une structure naturelle de $\mathcal{O}_E$-module.

Le module de Tate $T_\pi(\Gamma) = \varprojlim \Gamma_{\pi^n}(\mathcal{O}_{K_s})$ de Γ s'identifie à l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\Gamma(\mathcal{O}_{K_s})$ vérifiant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \pi u_n$, pour tout n. C'est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang 1 sur lequel G opère linéairement et continû-

[1] Je voudrais remercier aussi le département de mathématiques de l'Université de Californie à Irvine pour son hospitalité

ment; cette action définit donc un caractère continu χ_r de G à valeurs dans le groupe des unités U_E de $\mathcal{O}_E$: on a

$$g(u)=\chi_\Gamma(g)\cdot u, \quad \text{pour } u\in T_\pi(\Gamma), \quad g\in G.$$

Enfin, le module $\underline{\omega}_\Gamma$ des différentielles invariantes de Γ, i.e. des formes différentielles de la forme $\alpha(X)\,dX$, avec $\alpha(X)\in\mathcal{O}_E[[X]]$, vérifiant

$$\alpha(\Gamma(X,Y))\,d\Gamma(X,Y)=\alpha(X)\,dX+\alpha(Y)\,dY,$$

est un $\mathcal{O}_E$-module libre de rang 1.

1.4. Soit $\Omega=\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{K_s})$ le module des $\mathcal{O}_K$-différentielles (de Kähler) de l'anneau $\mathcal{O}_{K_s}$ (autrement dit le $\mathcal{O}_{K_s}$-module engendré par les da, pour $a\in\mathcal{O}_{K_s}$, avec les relations

$$\begin{aligned} da&=0 && \text{si } a\in\mathcal{O}_K,\\ d(a+b)&=da+db, && \text{si } a,\ b\in\mathcal{O}_{K_s},\\ d(ab)&=a\cdot db+b\cdot da, && \text{si } a,\ b\in\mathcal{O}_{K_s}). \end{aligned}$$

1.5. Pour toute forme différentielle $\omega=\alpha(X)\,dX$, avec $\alpha(X)\in\mathcal{O}_E[[X]]$, et tout $u\in\Gamma(\mathcal{O}_{K_s})$, on note $u^*(\omega)$ l'élément $u(\alpha(X))\cdot d(u(X))$ de Ω.

Proposition 1. *L'application $\Gamma(\mathcal{O}_{K_s})\times\underline{\omega}_\Gamma\to\Omega$, qui à (u,ω) associe $\langle u,\omega\rangle=u^*(\omega)$ est $\mathcal{O}_E$-bilinéaire et vérifie $\langle gu,\omega\rangle=g(\langle u,\omega\rangle)$, pour tout $g\in G$, $u\in\Gamma(\mathcal{O}_{K_s})$, $\omega\in\underline{\omega}_\Gamma$.*

Démonstration. La linéarité par rapport à la deuxième variable et la compatibilité avec les actions de G sont évidentes. Le fait que $\langle u+u',\omega\rangle=\langle u,\omega\rangle+\langle u',\omega\rangle$ résulte de ce que ω est invariante. Le fait que $\langle au,\omega\rangle=a\langle u,\omega\rangle$, pour tout $a\in\mathcal{O}_E$ résulte de ce que, si $\omega=\alpha(X)\,dX\in\underline{\omega}_\Gamma$, on a $\alpha(\sum c_i X^i)\cdot d(\sum c_i X^i)=c_1\cdot\alpha(X)\,dX$, pour tout $\mathcal{O}_E$-endomorphisme $\sum c_i X^i$ de Γ (ce qui se déduit facilement du n° 3.3 du chap. VI de [4]). □

1.6. Si l'on fait opérer G trivialement sur $\underline{\omega}_\Gamma$, $K_s\otimes_{\mathcal{O}_E}T_\pi(\Gamma)\otimes_{\mathcal{O}_E}\underline{\omega}_\Gamma$ a une structure de K_s-espace vectoriel de dimension 1, muni d'une action semi-linéaire et continue de G. Tout élément $\alpha\in K_s\otimes_{\mathcal{O}_E}T_\pi(\Gamma)\otimes_{\mathcal{O}_E}\underline{\omega}_\Gamma$ peut s'écrire (de manière non unique) sous la forme $\pi^{-r}a\otimes u\otimes\omega$, avec $r\in\mathbf{N}$, $a\in\mathcal{O}_{K_s}$, $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\in T_\pi(\Gamma)$, $\omega\in\underline{\omega}_\Gamma$; il résulte facilement de la proposition précédente que l'élément $a\cdot u_r^*(\omega)\in\Omega$ ne dépend que de α et pas de la manière de l'écrire sous la forme ci-dessus. On voit aussi que l'application

$$\xi_{K,\Gamma}=\xi\colon\ K_s\otimes_{\mathcal{O}_E}T_\pi(\Gamma)\otimes_{\mathcal{O}_E}\underline{\omega}_\Gamma\to\Omega$$

qui à $\pi^{-r}a\otimes u\otimes\omega$ associe $a\cdot u_r^*(\omega)$ *est $\mathcal{O}_{K_s}$-linéaire et commute à l'action de G.*

Théorème 1. (i) *L'application ξ est surjective.*

(ii) *Soit q le cardinal de k_E, $\mathfrak{D}_{K/K_0}$ la différente de l'extension K/K_0 et*

$$\mathfrak{a}_{K,\Gamma}=\{a\in K_s \mid v(a)\geqq -v(\mathfrak{D}_{K/K_0})-1/(q-1)\}.$$

Alors le noyau de ξ est le sous-$\mathcal{O}_{K_s}$-module $\mathfrak{a}_{K,\Gamma}\otimes T_\pi(\Gamma)\otimes\underline{\omega}_\Gamma$ de $K_s\otimes T_\pi(\Gamma)\otimes\underline{\omega}_\Gamma$.

La *démonstration* de ce théorème est l'objet du §2. Donnons-en dès maintenant quelques applications:

Corollaire 1. *Soit $\hat{\mathfrak{a}}_{K,I}$ l'adhérence de $\mathfrak{a}_{K,I}$ dans C. On a des isomorphismes canoniques*

(1) $\Omega \simeq (K_s/\mathfrak{a}_{K,\Gamma}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma) \otimes_{\mathcal{O}_E} \underline{\omega}_\Gamma$,

(2) $T_\pi(\Omega) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(E/\mathcal{O}_E, \Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma) \otimes_{\mathcal{O}_E} \underline{\omega}_\Gamma$,

(3) $V_\pi(\Omega) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_E}(E, \Omega) \simeq C \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma) \otimes_{\mathcal{O}_E} \underline{\omega}_\Gamma$

de $\mathcal{O}_{K_s}$-modules (resp. $\mathcal{O}_C$-modules, C-espaces vectoriels), qui commutent à l'action de G.

Le premier isomorphisme résulte du théorème 1 et de ce que

$$K_s \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_\Gamma / \mathfrak{a}_{K,I} \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_I$$

s'identifie à $(K_s/\mathfrak{a}_{K,\Gamma}) \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_\Gamma$. Le second et le troisième s'en déduisent par passage à la limite. □

Remarques. 1) Si on choisit un générateur du $\mathcal{O}_E$-module $\underline{\omega}_I$, on en déduit des isomorphismes $\Omega \simeq (K_s/\mathfrak{a}_{K,I}) \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma)$,

$$T_\pi(\Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma} \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma) \quad \text{et} \quad V_\pi(\Omega) \simeq C \otimes_{\mathcal{O}_E} T_\pi(\Gamma).$$

2) Si on choisit de plus un générateur de $T_\pi(\Gamma)$, on obtient des isomorphismes (de $\mathcal{O}_{K_s}$-modules, resp. $\mathcal{O}_C$-modules, C-espaces vectoriels) $\Omega \simeq K_s/\mathfrak{a}_{K,I}$, $T_\pi(\Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_{K,I}$ et $V_\pi(\Omega) \simeq C$, tels que, pour tout $g \in G$, si l'image de ω est α, l'image de $g\omega$ est $\chi_\Gamma(g) \cdot g\alpha$.

1.7. Les résultats qui précèdent s'appliquent en particulier *au* cas où K est de caractéristique 0 ($K_s = \bar{K}$ est alors une clôture algébrique de K) et où Γ est le complété formel à l'origine $\hat{\mathbf{G}}_m$ du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$. On a alors $E = \mathbf{Q}_p$, $q = p$, $K_0 = \mathrm{Frac}(W(k))$ et on peut choisir $\pi = p$. Le $\mathbf{Z}_p$-module $\underline{\omega}_\Gamma$ a alors un générateur canonique qui est l'unique forme différentielle ω telle que $u^*(\omega) = du/u$, pour tout $u \in \hat{\mathbf{G}}_m(\bar{K})$ (identifié aux unités de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$). Le module de Tate $T_p(\Gamma) = T_p(\mathbf{G}_m) = T_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ s'identifie au $\mathbf{Z}_p$-module, libre de rang 1, formé des suites $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\bar{K}$ vérifiant $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$, pour tout n. Le caractère χ_Γ est le caractère cyclotomique χ (qui donne l'action de G sur $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}(\bar{K})$).

Si, pour tout $\mathbf{Z}_p$-module M, muni d'une action $\mathbf{Z}_p$-linéaire de G, on pose $M(1) = M \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\mathbf{G}_m)$, les résultats ci-dessus se réénoncent:

Théorème 1'. *Supposons K de caractéristique 0, soient $K_0 = \mathrm{Frac}(W(k))$, $\mathfrak{D}_{K/K_0}$ la différente de l'extension K/K_0, v la valuation de C normalisée par $v(p) = 1$,*

$$\mathfrak{a}_K = \{a \in \bar{K} \mid v(a) \geqq -v(\mathfrak{D}_{K/K_0}) - 1/(p-1)\},$$

$\hat{\mathfrak{a}}_K$ l'adhérence de $\mathfrak{a}_K$ dans C. Alors

(i) *L'application ξ: $\bar{K}(1) \to \Omega$, qui à $p^{-r} a \otimes (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (avec $r \in \mathbf{N}$, $a \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$) associe $a \cdot d\varepsilon_r/\varepsilon_r$, est $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire et commute à l'action de G; elle est surjective et son noyau est $\mathfrak{a}_K(1)$;*

(ii) *l'application ξ induit des isomorphismes canoniques $\Omega \simeq (\bar{K}/\mathfrak{a}_K)(1)$, $T_p(\Omega) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_K(1)$ et $V_p(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \Omega) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\Omega) \simeq C(1)$.* □

1.8. *Remarque.* Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ de degré ef, où f désigne le degré de l'extension résiduelle et e l'indice de ramification absolu et soit Γ un groupe formel de Lubin-Tate pour K. Si π est une uniformisante de K, $T_p(\Gamma)$ s'identifie à $T_\pi(\Gamma)$ et est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang 1. On sait (cf. [6], III, A4 et A5) que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K[G]}(T_p(\Gamma), \mathcal{O}_C(1))$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang 1. Si φ en est un générateur et si t (resp. t_0) est un générateur de $T_p(\Gamma)$ (resp. $\mathbf{Z}_p(1) = T_p(\mathbf{G}_m)$), alors $\varphi(t) = a \otimes t_0$ avec $a \in \mathcal{O}_C$, et a est déterminé, indépendamment du choix des trois générateurs, modulo les unités de K. En particulier, si v_K désigne la valuation de C normalisée par $v(K^*) = \mathbf{Z}$, $v_K(a)$ est un invariant de Γ.

Proposition 2. *Avec les hypothèses et les notations qui précédent, $v_K(a)$ est l'unique nombre rationnel s vérifiant $0 \leqq s < 1$ et $s \equiv \frac{1}{p^f - 1} - \frac{e}{p-1} \pmod 1$.*

Démonstration. Il est clair que $T_\pi(\Omega)$ s'identifie à $T_p(\Omega)$. Si l'on choisi un générateur de ω_Γ, le corollaire 1 au théorème 1 et le théorème 1′ fournissent des isomorphismes

$$T_p(\Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma} \otimes_{\mathcal{O}_K} T_p(\Gamma) \quad \text{et} \quad T_p(\Omega) \simeq \hat{\mathfrak{a}}_K(1),$$

d'où un isomorphisme de $\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma} \otimes_{\mathcal{O}_K} T_p(\Gamma)$ sur $\hat{\mathfrak{a}}_K(1)$ qui, avec des notations évidentes, induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} T_p(\Gamma)$ sur $(\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma}^{-1} \cdot \hat{\mathfrak{a}}_K)(1)$. Cela fournit une nouvelle démonstration du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K[G]}(T_p(\Gamma), \mathcal{O}_C(1)) \neq 0$ et cela prouve l'existence d'un $\mathcal{O}_K[G]$-homomorphisme $\psi\colon T_p(\Gamma) \to C(1)$ tel que

$$\psi(t) = b \otimes t_0, \text{ avec}$$

$$v_K(b) = v_K(\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma}^{-1} \cdot \hat{\mathfrak{a}}_K) = -v_K(\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma}) + v_K(\hat{\mathfrak{a}}_K).$$

Pour le calcul de $v_K(\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma})$, on a $K = K_0 = E$, donc $v_K(\mathfrak{D}_{K/K_0}) = 0$ et $q = p^f$, d'où $v_K(\hat{\mathfrak{a}}_{K,\Gamma}) = -1/(p^f - 1)$.

Pour le calcul de $v_K(\hat{\mathfrak{a}}_K)$, K_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, on a donc $\mathfrak{D}_{K/K_0} = \mathfrak{D}_{K/\mathbf{Q}_p}$; si l'on observe que $v_K = e \cdot v$, avec v la valuation normalisée par $v(p) = 1$, on a donc

$$v_K(\hat{\mathfrak{a}}_K) = -v_K(\mathfrak{D}_{K/\mathbf{Q}_p}) - e \cdot (1/(p-1)), \quad \text{d'où}$$

$$v_K(b) = \frac{1}{p^f - 1} - \frac{e}{p-1} - v_K(\mathfrak{D}_{K/\mathbf{Q}_p}) \equiv \frac{1}{p^f - 1} - \frac{e}{p-1} \pmod 1$$

et la proposition en résulte. □

§2. Démonstration du Théorème 1

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent. Si $K' \subset L$ sont des extensions finies séparables de K_0, on note $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ le $\mathcal{O}_L$-module des $\mathcal{O}_{K'}$-différentielles de l'anneau $\mathcal{O}_L$ et $d_{L/K'}\colon \mathcal{O}_L \to \Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ l'application canonique. On noté $d\colon \mathcal{O}_{K_s} \to \Omega$ l'application canonique.

2.1. Les résultats suivants sont bien connus (cf. [5], chap. III, prop. 8, 12, 14 et th. 1):

Lemme 1. *Soient $K' \subset L$ des extensions finies séparables de K_0.*

(i) *Il existe un élément de $\mathcal{O}_L$ qui l'engendre en tant que $\mathcal{O}_{K'}$-algèbre; si b est un tel élément et si P est le polynôme minimal de b sur K', l'idéal de $\mathcal{O}_L$ engendré* *par $P'(b)$ est la différente $\mathfrak{D}_{L/K'}$ de l'extension L/K'. Le $\mathcal{O}_L$-module $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ est engendré par $d_{L/K'}b$ et son annulateur est $\mathfrak{D}_{L/K'}$.*

(ii) *L'extension L/K' est non ramifiée si et seulement si $\mathfrak{D}_{L/K'}=\mathcal{O}_L$ ou encore si et seulement si $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)=0$.*

(iii) *Si L' est une extension finie séparable de L, on a $\mathfrak{D}_{L'/K'}=\mathfrak{D}_{L'/L}\cdot\mathfrak{D}_{L/K'}$.* □

2.2. **Lemme 2.** *Soient $K'\subset K''\subset L$ des extensions finies séparables de K_0 et soit v l'application canonique de $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_{K''}}(\mathcal{O}_L)$. Alors v est surjective et, pour tout $\omega\in\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$,*

$$v(\mathrm{Ann}(v(\omega)))=\max\{0, v(\mathrm{Ann}(\omega))-v(\mathfrak{D}_{K''/K'})\}.$$

En particulier, v est un isomorphisme si K''/K' est non ramifiée.

Démonstration. Soit b un élément engendrant $\mathcal{O}_L$ comme $\mathcal{O}_{K'}$-algèbre; c'est a fortiori un générateur de $\mathcal{O}_L$ comme $\mathcal{O}_{K''}$-algèbre, et le lemme 1 montre que $d_{L/K'}b$ (resp. $d_{L/K''}b$) engendre le $\mathcal{O}_L$-module $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ (resp. $\Omega_{\mathcal{O}_{K''}}(\mathcal{O}_L)$), d'où la surjectivité.

Si $\omega=a\cdot d_{L/K'}b$ est un élément non nul de $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$, il résulte du lemme 1 que $v(\mathrm{Ann}(\omega))=v(\mathfrak{D}_{L/K'})-v(a)$; on a $v(\omega)=a\cdot d_{L/K''}b$ et, toujours d'après le lemme 1,

$$v(\mathrm{Ann}(v(\omega)))=\max\{0, v(\mathfrak{D}_{L/K''})-v(a)\};$$

comme $\mathfrak{D}_{L/K'}=\mathfrak{D}_{L/K''}\cdot\mathfrak{D}_{K''/K'}$, on a $v(\mathfrak{D}_{L/K''})=v(\mathfrak{D}_{L/K'})-v(\mathfrak{D}_{K''/K'})$ et

$$v(\mathrm{Ann}(v(\omega)))=\max\{0, v(\mathrm{Ann}(\omega))-v(\mathfrak{D}_{K''/K'})\}. \quad \square$$

2.3. **Lemme 3.** *Soit L une extension finie séparable de K et soit b une uniformisante de L. Le $\mathcal{O}_L$-module $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$ est engendré par $d_{L/K}b$.*

Démonstration. Si K' est l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans L, b engendre $\mathcal{O}_L$ en tant que $\mathcal{O}_{K'}$-algèbre et, d'après le lemme 1, $d_{L/K'}b$ engendre $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$. Mais, d'après le lemme 2, l'application canonique de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}(\mathcal{O}_L)$ est un isomorphisme et $d_{L/K}b$, qui est l'image réciproque de $d_{L/K'}b$ engendre $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$. □

2.4. **Lemme 4.** *Soient $L\subset L'$ des extensions finies séparables de K. L'application de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{L'})$ induite par l'inclusion de $\mathcal{O}_L$ dans $\mathcal{O}_{L'}$ est injective. Plus précisément, pour tout $\omega\in\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, si $\mathfrak{a}$ désigne l'annulateur de ω, l'annulateur de l'image de ω est $\mathcal{O}_{L'}\cdot\mathfrak{a}$.*

Démonstration. Par dévissage, on peut supposer que l'extension L'/L est soit non ramifiée, soit totalement ramifiée.

Si L'/L est non ramifiée, choisissons une uniformisante b de L. D'après le lemme 1, si ω est un élément non nul de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, il s'écrit $\omega=a\cdot d_{L/K}b$ avec $a\in\mathcal{O}_L$, et, si $\mathfrak{a}=\mathrm{Ann}(\omega)$, on a $v(\mathfrak{a})=v(\mathfrak{D}_{L/K})-v(a)$. Son image dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{L'})$ est $a\cdot d_{L'/K}b$ et, comme b est aussi une uniformisante de L', on a, pour tout $c\in\mathcal{O}_{L'}$, $ca\cdot d_{L'/K}b=0$ si et seulement si $v(ca)\geqq v(\mathfrak{D}_{L'/K})=v(\mathfrak{D}_{L/K})$, puisque $\mathfrak{D}_{L'/K}=\mathfrak{D}_{L'/L}\cdot\mathfrak{D}_{L/K}$ et $\mathfrak{D}_{L'/L}=\mathcal{O}_{L'}$. La valuation de l'annulateur $\mathfrak{a}'$ de $a\cdot d_{L'/K}b$ est donc $v(\mathfrak{D}_{L/K})-v(a)=v(\mathfrak{a})$ et on a bien $\mathfrak{a}'=\mathcal{O}_{L'}\cdot\mathfrak{a}$.

Si L'/L est totalement ramifiée, choisissons une uniformisante b' de L' et soit $P(X)=a_0+a_1X+\ldots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n$ le polynôme minimal de b' sur L; c'est un polynôme d'Eisenstein et $b=-a_0$ est une uniformisante de L. Si ω est un élément non nul de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, il s'écrit donc $\omega=a\cdot d_{L/K}b$, avec $a\in\mathcal{O}_L$, et la valuation de l'annulateur $\mathfrak{a}$ de ω est $v(\mathfrak{D}_{L/K})-v(a)$. L'image ω' de ω dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{L'})$ est $\omega'=a\cdot d_{L/K'}b$. Comme $b=a_1b'+a_2b'^2+\ldots+b'^n$, on a

$$d_{L/K'}b=(a_1+2a_2b'+\ldots+nb'^{n-1})\cdot d_{L/K'}b'=P'(b')\cdot d_{L/K'}b'.$$

D'où $\omega'=P'(b')\cdot a\cdot d_{L'/K}b'$ et, si $c\in\mathcal{O}_{L'}$, on a $c\omega'=0$ si et seulement si $v(c\cdot P'(b')\cdot a)\geqq v(\mathfrak{D}_{L'/K})$; comme $v(P'(b'))=v(\mathfrak{D}_{L'/L})$ et comme $\mathfrak{D}_{L'/K}=\mathfrak{D}_{L'/L}\cdot\mathfrak{D}_{L/K}$, cela revient à dire que $v(c)\geqq v(\mathfrak{D}_{L/K})-v(a)=v(\mathfrak{a})$ et on a encore $\mathrm{Ann}(\omega')=\mathcal{O}_{L'}\cdot\mathfrak{a}$. □

2.5. Il est clair que $\Omega=\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{K_s})=\varinjlim\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans K_s. Le lemme précédent montre que l'application canonique de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$ dans Ω est injective et nous l'utilisons pour identifier $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$ à un sous-$\mathcal{O}_L$-module de Ω.

Le lemme précédent montre aussi, que pour tout $\omega\in\Omega$, si L est une extension finie de K telle que $\omega\in\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, et si $\mathfrak{a}$ désigne l'annulateur de ω considéré comme élément de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$, alors $\mathrm{Ann}(\omega)$, annulateur de ω dans Ω, est $\mathcal{O}_{K_s}\cdot\mathfrak{a}$. En particulier c'est un idéal principal de $\mathcal{O}_{K_s}$, de valuation égale à celle de $\mathfrak{a}$.

Lemme 5. *Soient ω, $\omega'\in\Omega$. Pour qu'il existe $c\in\mathcal{O}_{K_s}$ tel que $\omega'=c\omega$, il faut et il suffit que* $\mathrm{Ann}(\omega)\subset\mathrm{Ann}(\omega')$.

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante: C'est clair si $\omega'=0$. Supposons donc $\omega'\neq 0$ (ce qui entraîne $\mathrm{Ann}(\omega)\neq\mathcal{O}_{K_s}$, donc $\omega\neq 0$). Choisissons une extension finie L de K telle que ω, $\omega'\in\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_L)$. Si b est une uniformisante de L, on peut écrire $\omega=a\cdot db$, $\omega'=a'\cdot db$, avec a, $a'\in\mathcal{O}_L$.

Soit $r=v(\mathfrak{D}_{L/K})$. D'après le lemme 1, $v(\mathrm{Ann}(db))=r$; comme ω et ω' sont $\neq 0$, on a $v(a)<r$ et $v(a')<r$ et $v(\mathrm{Ann}(\omega))=r-v(a)$, $v(\mathrm{Ann}(\omega'))=r-v(a')$. L'hypothèse implique $r-v(a)\geqq r-v(a')$, donc $v(a')\geqq v(a)$ et il existe $c\in\mathcal{O}_L$ tel que $a'=ca$, donc tel que $\omega'=c\omega$. □

2.6. **Lemme 6.** *Soit $\Omega_0=\Omega_{\mathcal{O}_{K_0}}(\mathcal{O}_{K_s})$. L'application canonique ν de Ω_0 dans Ω est surjective et son noyau est formé des éléments annulés par $\mathfrak{D}_{K/K_0}$. Plus précisément, si $\omega\in\Omega_0$, on a*

$$v(\mathrm{Ann}(\nu(\omega)))=\max\{0, v(\mathrm{Ann}(\omega))-v(\mathfrak{D}_{K/K_0})\}.$$

Démonstration. Cela résulte, par passage à la limite, du lemme 2. □

2.7. **Lemme 7.** *Soit ω_0 un générateur de ω_Γ et soit $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un générateur de $T_\pi(\Gamma)$. Pour tout entier $r\geqq 0$, on a*

$$v(\mathrm{Ann}(u_r^*(\omega_0)))=\max\left\{0, r-\frac{1}{q-1}-v(\mathfrak{D}_{K/K_0})\right\}.$$

Démonstration. Le lemme 6 permet de supposer $K=K_0$, et on peut aussi supposer $r\geqq 1$.

Si l'on choisit une coordonnée X pour Γ, l'algèbre affine de Γ est $\mathcal{O}_E[[X]]$ et ω_0 est de la forme $\alpha(X)\,dX$, avec $\alpha(X)$ un élément inversible de $\mathcal{O}_E[[X]]$.

Posons $\pi_r = u_r(X)$, $E_r = E(\pi_r)$ et $K_r = K(\pi_r)$. On sait ([1], Chap. VI, §3 et [5], Chap. XV, §2) que E_r/E est une extension abélienne totalement ramifiée et que π_r est une uniformisante de E_r; en outre, si U (resp. $U^{(n)}$) désigne le groupe des unités de $\mathcal{O}_E$ (resp. des unités de $\mathcal{O}_E$ congrues à 1 mod π^n), $\mathrm{Gal}(E_r/E)$, muni de sa filtration par les groupes de ramification supérieure, s'identifie au quotient $U/U^{(r)}$ (muni de la filtration induite par les $U^{(n)}$). Un calcul classique de ramification (utiliser la proposition 4 et le paragraphe 3 du chap. IV de [5]) montre que $v(\mathfrak{D}_{E_r/E}) = r - 1/(q-1)$ (cela peut aussi se montrer par récurrence sur r, en utilisant les formules explicites qui donnent π_n en fonction de π_{n+1}).

Comme π est aussi une uniformisante de $K = K_0$, π_r est encore une uniformisante de K_r. Comme le polynôme minimal de π_r sur K n'est autre que le polynôme minimal de π_r sur E, on a $v(\mathrm{Ann}(d\pi_r)) = v(\mathfrak{D}_{E_r/E}) = r - 1/(q-1)$, mais $u_r^*(\omega_0) = \alpha(\pi_r)\,d\pi_r$ où $\alpha(\pi_r)$ est une unité; on a donc aussi

$$v(\mathrm{Ann}\,(u_r^*(\omega_0)) = r - 1/(q-1).$$

Remarque. Comme $u_r^*(\omega_0) = \pi \cdot u_{r+1}^*(\omega_0)$, il aurait suffi en fait de démontrer le résultat pour une valeur de r telle que $r - 1/(q-1) > 0$. Si $q \neq 2$ (a fortiori si $p \neq 2$), on peut prendre $r = 1$ (et l'extension E_1/E est alors modérément ramifiée); si $q = 2$, on peut prendre $r = 2$.

2.8. *Fin de la Démonstration du Théorème 1.* Choisissons, comme dans le lemme 7 un générateur ω_0 de $\underline{\omega}_\Gamma$ et un générateur u de $T_\pi(\Gamma)$.

Soit $\omega \in \Omega$. Choisissons un entier r suffisamment grand pour que $v(\mathrm{Ann}(\omega)) \leqq r - \dfrac{1}{q-1} - v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$. D'après le lemme 7, $\mathrm{Ann}(u_r^*(\omega_0)) \subset \mathrm{Ann}(\omega)$ et, d'après le lemme 5, il existe $c \in \mathcal{O}_{K_s}$ tel que $\omega = c \cdot u_r^*(\omega_0)$. On a donc

$$\omega = \xi(\pi^{-r} c \otimes u \otimes \omega_0) \qquad \text{et } \xi \text{ est bien surjective.}$$

Tout élément $\alpha \in K_s \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_\Gamma$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $a \otimes u \otimes \omega_0$, avec $a \in K_s$. Choisissons un entier r suffisamment grand pour que $r \geqq \dfrac{1}{q-1} + v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$ et $a_r = \pi^r a \in \mathcal{O}_{K_s}$. Alors, d'après le lemme 7, $\xi(\alpha) = a_r \cdot u_r^*(\omega_0)$ est nul si et seulement si $v(a_r) \geqq r - \dfrac{1}{q-1} - v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$ ou encore si et seulement si $v(a) \geqq -\dfrac{1}{q-1} - v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$ et le noyau est bien $\mathfrak{a}_{K,\Gamma} \otimes T_\pi(\Gamma) \otimes \underline{\omega}_\Gamma$.

§3. Application aux variétés abéliennes

Dans toute la suite de cet article, on conserve les hypothèses et notations du §1, on suppose en outre K de caractéristique 0 et $\bar{K} = K_s$ est une clôture algébrique de K.

3.1. Soit X une variété projective non singulière sur K. Une conjecture bien connue de Tate ([8], p. 58) peut être précisée en disant que la cohomologie étale p-adique de $X \times \bar{K}$ est de Hodge-Tate et que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, tout $j \in \mathbf{Z}$, le

K-espace vectoriel des éléments fixes par G de $C(j)\otimes_{\mathbf{Q}_p} H^i_{et}(X\times\bar{K}, \mathbf{Q}_p)$ est nul si $j<0$ ou $>i$ et s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en X, à $H^{i-j}(X, \Omega^j_X)$ si $0\leqq j\leqq i$ (voir [3], appendice, pour un énoncé en forme).

Lorsque X est une variété abélienne, $H^*_{et}(X\times\bar{K}, \mathbf{Q}_p)$ s'identifie à l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur le module de Tate

$$T_p(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, X(\bar{K}))$$

et la cohomologie de Hodge

$$H^*_{\mathrm{Hodge}}(X) = \bigoplus_{i\geqq 0}\left(\bigoplus_{j=0}^{i} H^{i-j}(X, \Omega^j_X)\right)$$

s'identifie à l'algèbre extérieure de

$$H^1_{\mathrm{Hodge}}(X) = H^1(X, O_X)\oplus H^0(X, \Omega_X)$$

(où $O_X = O_{X/K}$ est le faisceau structural et $\Omega_X = \Omega^1_{X/K}$ le faisceau des formes différentielles). La conjecture de Tate, dans ce cas, se ramène alors au résultat suivant:

Théorème 2 (Tate, Raynaud). *Soit X une variété abélienne sur K. Il existe des applications K-linéaires bijectives, canoniques et fonctorielles en X*

$$\rho^1_X\colon\ H^1(X, O_X)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C),$$

$$\rho^0_X\colon\ H^0(X, \Omega_X)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C(1)).$$

3.2. Nous nous proposons d'utiliser le théorème 1' pour donner une nouvelle démonstration de ce résultat. Commençons par donner un énoncé apparemment plus faible:

Théorème 2'. *Il existe une application K-linéaire injective, fonctorielle en X,*

$$\rho^0_X\colon\ H^0(X, \Omega_X)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C(1)).$$

Rappelons brièvement comment *le théorème* 2' *entraîne le théorème* 2: Soit d la dimension de X. Le théorème 2' implique que $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C(1))\geqq d$, avec égalité si et seulement si ρ^0_X est un isomorphisme. Si X' est la variété abélienne duale de X, il résulte du fait que $T_p(X)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(X'), \mathbf{Z}_p(1))$ et de l'injectivité de $\rho^0_{X'}$ que $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C)\geqq d$. Comme la somme de la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C(1))$ et de celle de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), C)$ est inférieure ou égale au rang *du* $\mathbf{Z}_p$-module libre $T_p(X)$ ([7], prop. 4), qui est $2d$, chacune de ces dimensions est égale à d et ρ^0_X est un isomorphisme. Enfin l'isomorphisme ρ^1_X s'obtient, modulo des identifications bien connues, en prenant la bijection réciproque de la transposée de $\rho^0_{X'}$. $\square$

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2': on construit ρ^0_X aux n$^{\text{os}}$ 3.3 et 3.4 et on démontre qu'elle est injective aux n$^{\text{os}}$ 3.5 à 3.7.

3.3. Soit $\mathscr{X}$ un schéma propre et de type fini sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ qui prolonge X, i.e. tel que $\mathscr{X}\times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K}\mathrm{Spec}\,K$ s'identifie à X (si $\varphi\colon X\to\mathbf{P}^m_K$ est un plongement de X

dans un espace projectif, on peut prendre pour $\mathscr{X}$ l'adhérence schématique du composé de φ avec la flèche canonique de $\mathbf{P}_K^m$ dans $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^m$).

Si u: $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\bar{K}} \to \mathscr{X}$ est un point de $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et si ω est une section globale du faisceau $\Omega_{\mathscr{X}}$ des différentielles de $\mathscr{X}$, l'image réciproque $u^*(\omega)$ de ω par u est un élément de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \Omega$. On en déduit un accouplement

$$H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}}) \times \mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \Omega:$$

c'est celui qui à (ω, u) associe $\langle\omega, u\rangle = u^*(\omega)$. Il est clair qu'il est $\mathcal{O}_K$-linéaire en la première variable et vérifie $\langle\omega, gu\rangle = g(\langle\omega, u\rangle)$, si $g \in G$, $\omega \in H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$, $u \in \mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$.

Par construction, $H^0(X, \Omega_X)$ s'identifie à $K \otimes_{\mathcal{O}_K} H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ et $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ à $X(\bar{K})$, ce qui fait que $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est muni d'une structure de groupe abélien (même si $\mathscr{X}$ n'a pas de structure de schéma en groupes).

Proposition 3. *Il existe un entier $r \geqq 0$ tel que*

(i) *la restriction de l'application $\omega \mapsto 1 \otimes \omega$ de $H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ dans $H^0(X, \Omega_X)$ à $p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ est injective;*

(ii) *si $\omega \in p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ et si u_1, $u_2 \in \mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = X(\bar{K})$, on a*

$$\langle\omega, u_1 + u_2\rangle = \langle\omega, u_1\rangle + \langle\omega, u_2\rangle.$$

Démonstration. Il suffit de montrer, pour chacune des propriétés (i) et (ii), l'existence d'un entier r qui la vérifie.

(i) Le noyau de $\omega \mapsto 1 \otimes \omega$ est le sous-$\mathcal{O}_K$-module de torsion de $H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$. Comme $H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ est de type fini, sa torsion est bornée et $p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ est sans torsion pour r suffisamment grand.

(ii) Soit $\mathscr{Y}$ un schéma propre et de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ qui prolonge $X \times X$ tel que les trois flèches évidentes de $X \times X$ dans X, la première projection pr_1, la deuxième projection pr_2 et la multiplication m, se prolongent en des flèches $\mathrm{pr}_{1\mathscr{X}}$, $\mathrm{pr}_{2\mathscr{X}}$ et $\mathrm{m}_{\mathscr{X}}$ de $\mathscr{Y}$ dans $\mathscr{X}$ (si ψ: $X \times X \to \mathbf{P}_K^n$ est un plongement de $X \times X$ dans un espace projectif, il suffit de prendre pour $\mathscr{Y}$ l'adhérence schématique du morphisme composé

$$X \times X \xrightarrow{\psi \times \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_2 \times m} \mathbf{P}_K^n \times X \times X \times X \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n \times \mathscr{X} \times \mathscr{X} \times \mathscr{X}).$$

On sait que toute forme différentielle de $H^0(X, \Omega_X)$ est invariante et, par conséquent, si $\omega \in H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$, $\mathrm{pr}_{1\mathscr{X}}^*(\omega) - m_{\mathscr{X}}^*(\omega) + \mathrm{pr}_{2\mathscr{X}}^*(\omega)$ appartient au noyau de la flèche canonique de $H^0(\mathscr{Y}, \Omega_{\mathscr{Y}})$ dans $H^0(X \times X, \Omega_{X \times X})$, i.e. à $H^0(\mathscr{Y}, \Omega_{\mathscr{Y}})_{\mathrm{tor}}$. Ici encore, la torsion est bornée; si p^r annule $H^0(\mathscr{Y}, \Omega_{\mathscr{Y}})_{\mathrm{tor}}$, on a donc $m_{\mathscr{X}}^*(\omega) = \mathrm{pr}_{1\mathscr{X}}^*(\omega) + \mathrm{pr}_{2\mathscr{X}}^*(\omega)$, pour tout $\omega \in p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$.

Soient u_1 et u_2 des points de $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ qui prolongent des points u_{1X} et u_{2X} de $X(\bar{K})$; soit v le point de $\mathscr{Y}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ qui prolonge le morphisme

$$\operatorname{Spec}\bar{K} \xrightarrow{\mathrm{mult}} \operatorname{Spec}\bar{K} \times \operatorname{Spec}\bar{K} \xrightarrow{u_{1X} \times u_{2X}} X \times X;$$

on a $u_1 = \mathrm{pr}_{1\mathscr{X}} \cdot v$, $u_2 = \mathrm{pr}_{2\mathscr{X}} \cdot v$ et $u_1 + u_2 = m_{\mathscr{X}} \cdot v$, de sorte que $u_1^*(\omega) = v^*(\mathrm{pr}_{1\mathscr{X}}^*(\omega))$, $u_2^*(\omega) = v^*(\mathrm{pr}_{2\mathscr{X}}^*(\omega))$ et

$$(u_1 + u_2)^*(\omega) = v^*(m_{\mathscr{X}}^*(\omega)) = v^*(\mathrm{pr}_{1\mathscr{X}}^*(\omega) + \mathrm{pr}_{2\mathscr{X}}^*(\omega)) = u_1^*(\omega) + u_2^*(\omega),$$

si $\omega \in p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$. □

3.4. En conservant les notations du n° précédent, on a donc défini un accouplement

$$p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}}) \times X(\bar{K}) \to \Omega,$$

$\mathcal{O}_K$-linéaire en la première variable et $\mathbf{Z}[\mathbf{G}]$-linéaire en la seconde, ou encore une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(X(\bar{K}), \Omega)$.

Si l'on pose $V_p(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[p^{-1}], X(\bar{K}))$, comme on a

$$V_p(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[p^{-1}], \Omega)$$

(puisque Ω est un $\mathbf{Z}_p$-module de torsion), cette application induit une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X), V_p(\Omega))$, d'où, par extension des scalaires, une application K-linéaire

$$\hat{\rho}_X = \hat{\rho}_{X,\mathscr{X},r}\colon\ H^0(X, \Omega_X) = K \otimes_{\mathcal{O}_K} p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X), V_p(\Omega)).$$

Il est clair que, pour tout $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$, la restriction de $\hat{\rho}_X(\omega)$ à $T_p(X)$ est $\mathbf{Z}_p$-linéaire, d'où une application K-linéaire

$$\rho_X = \rho_{X,\mathscr{X},r}\colon\ H^0(X, \Omega_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(X), V_p(\Omega)).$$

Proposition 4. *Les applications $\hat{\rho}_X$ et ρ_X définies ci-dessus ne dépendent ni du choix de $\mathscr{X}$ ni de celui de l'entier r. Elles dépendent fonctoriellement de X.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les assertions concernant $\hat{\rho}_X$. L'indépendance par rapport à r, pour $\mathscr{X}$ fixé, est évidente. Si $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ sont deux prolongements, propres et de type fini, de X et si r est un entier suffisamment grand, l'égalité $\hat{\rho}_{X,\mathscr{X}_1,r} = \hat{\rho}_{X,\mathscr{X}_2,r}$ est évidente si l'un des $\mathscr{X}_i$ domine l'autre (i.e. si l'identité de X se prolonge en un morphisme de l'un des $\mathscr{X}_i$ sur l'autre); le cas général s'en déduit en faisant intervenir l'adhérence schématique $\mathscr{X}_3$ du morphisme

$$X \xrightarrow{\text{diag}} X \times X \longrightarrow \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2.$$

Vérifier que la dépendance par rapport à X est fonctorielle signifie vérifier que, si $\varphi\colon X_1 \to X_2$ est un morphisme de variétés abéliennes, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_2, \Omega_{X_2}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X_2), V_p(\Omega)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_1, \Omega_{X_1}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X_1), V_p(\Omega)), \end{array}$$

où toutes les flèches sont les flèches évidentes, est commutatif. Mais c'est immédiat, si l'on prend soin de choisir des prolongements $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ de X_1 et X_2 tels que φ se prolonge en un morphisme de $\mathscr{X}_1$ dans $\mathscr{X}_2$. □

3.5. Comme $V_p(\Omega)$ s'identifie, par le théorème 1' à $C(1)$, il suffit, pour achever la démonstration du théorème 2', d'établir le résultat suivant:

Proposition 5. *L'application ρ_X, définie au n° précédent, est injective.*

Démonstration. Il suffit d'établir les deux lemmes suivants:

Lemme 1. *L'application $\hat{\rho}_X$, définie au n° précédent, est injective.*

Lemme 2. *L'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X), C(1))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(T_p(X), C(1))$, induite par l'inclusion de $T_p(X)$ dans $V_p(X)$ est injective.*

3.6. Commençons par établir un autre lemme:

Lemme 3. *Soit X une variété projective de dimension d sur K et soit u un point non singulier de X, rationnel sur K. Il existe un prolongement propre $\mathscr{X}$ de X sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ tel que le séparé complété de l'anneau local en le point fermé de $\mathscr{X}$ adhérent à u soit un anneau de séries formelles en d variables à coefficients dans $\mathcal{O}_K$.*

Démonstration. Supposons X donnée comme sous-variété de $\mathbf{P}_K^n$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que u est le point de coordonnées homogènes $(1,0,0,\ldots,0)$. Soit I l'idéal homogène de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ définissant X; comme u est non singulier, quitte à changer la numérotation des X_j, on peut supposer qu'il existe $F_1,F_2,\ldots,F_{n-d}\in I$ tels que la matrice
$$\left(\frac{\partial F_i}{X_{d+j}}(1,0,\ldots,0)\right)_{1\leqq i,j\leqq n-d}$$
soit inversible. Quitte à remplacer $X_{d+1},X_{d+2},\ldots,X_n$ par des combinaisons linéaires, on peut même supposer que cette matrice est la matrice-unité. Si J désigne l'idéal de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ engendré par les X_i, pour $i=1,2,\ldots,d$, et par les X_iX_j, pour $i,j\geqq 1$, et si r_i est le degré de F_i, on a donc
$$F_i\equiv X_0^{r_i-1}\cdot X_{d+i}\pmod{J},\qquad \text{pour } i=1,2,\ldots,n-d.$$

Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_K$; pour $i=1,2,\ldots,n-d$, choisissons un entier s_i tel que $\pi^{s_i}F_i\in\mathcal{O}_K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$; choisissons enfin un entier s vérifiant $s>s_i$, pour tout i. Posons
$$X_0=X_0',$$
$$X_i=\pi^{2s}X_i',\qquad \text{pour } i=1,2,\ldots,d,$$
$$X_i=\pi^{s}X_i',\qquad \text{pour } i=d+1,\ldots,n.$$

On voit que $\pi^{s_i}F_i=\pi^{s_i+s}G_i$, où G_i est un polynôme homogène en les X_j' à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ vérifiant

$$(*)\qquad G_i\equiv X_0'^{r_i-1}\cdot X_{d+i}'(\operatorname{mod}\pi\cdot\mathcal{O}_K[X_0',X_1',\ldots,X_n']).$$

Le choix des coordonnées homogènes $X_0',X_1',\ldots,X_n'$ définit, de manière évidente, un plongement de $\mathbf{P}_K^n$ dans $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$. Prenons pour $\mathscr{X}$ l'adhérence schématique de X dans $\mathbf{P}_{\mathcal{O}_K}^n$ correspondant à ce plongement et soit $\bar{u}$ le point fermé de

$\mathscr{X}$ adhérent à u. Il est clair que les $\xi_i = X'_i/X'_0$, pour $i=1,2,\ldots,d$, engendrent l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,u}$ modulo son carré et que, compte-tenu de $(*)$, π et les ξ_i engendrent l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,\bar{u}}$ modulo son carré. On voit alors que $\hat{O}_{X,u}$ est l'anneau des séries formelles $K[[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d]]$ en d variables à coefficients dans K et que $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}} = \mathcal{O}_K[[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d]]$. □

3.7. *Démonstration du Lemme 1.* Revenons à notre variété abélienne X et choisissons un point u rationnel sur K (par exemple, l'origine). Choisissons un prolongement propre $\mathscr{X}$ de X sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ comme dans le lemme 3, de sorte que, si $\bar{u}$ est le point fermé de $\mathscr{X}$ adhérent à u, $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}} = \mathcal{O}_K[[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d]]$, anneau des séries formelles en d variables à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. Notons $\Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}})$ le $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}}$-module des «$\mathcal{O}_K$-différentielles continues» de $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}}$ (i.e. la solution du problème universel habituel pour les dérivations *continues*; c'est donc un $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}}$-module libre admettant $d\xi_1, d\xi_2, \ldots, d\xi_d$ comme base). On voit que l'application canonique de $p^r \cdot H^0(\mathscr{X}, \Omega_{\mathscr{X}})$ dans $\Omega^{\mathrm{cont}}_A(\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}})$ est injective.

L'ensemble des homomorphismes continus de $\hat{\mathcal{O}}_{X,\bar{u}}$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = X(\bar{K})$; comme $X(\bar{K})$ est un groupe p-divisible (au sens élémentaire), le lemme 1 résulte du lemme suivant:

Lemme 4. *Pour toute forme différentielle «continue» non nulle*

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)\cdot d\xi_i \quad de \quad \Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d]]),$$

il existe $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}_{\bar{K}}$, idéal maximal de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, tel que $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(x_1,x_2,\ldots,x_d)\cdot dx_i$ soit un élément non nul de Ω.

Commençons par vérifier le lemme lorsque $d=1$, ω étant donc de la forme $\omega = \alpha(\xi)\cdot d\xi$, avec $\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i$, une série formelle non nulle en la variable ξ à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. Soit v la valuation de $\bar{K}$ normalisée par $v(K^*) = \mathbf{Z}$ et soient

$$s = \inf_{i\in\mathbf{N}} v(a_i),$$

$$i_0 = \text{le plus petit entier tel que } v(a_{i_0}) = s.$$

Pour tout $x \in \mathfrak{m}_{\bar{K}}$, vérifiant $v(x) < i_0^{-1}$, on a $v(\alpha(x)) = s + i_0 \cdot v(x) < s+1$. Si l'on choisit pour x une uniformisante d'une extension finie L de K contenue dans $\bar{K}$ vérifiant $v(\mathfrak{D}_{L/K}) \geqq s+1$, l'annulateur de dx est $\mathcal{O}_{\bar{K}} \cdot \mathfrak{D}_{L/K}$ (cf. §2) et $\alpha(x)\cdot dx \neq 0$. □

Le cas général résulte alors du lemme suivant:

Lemme 5. *Soient $\alpha_1(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d), \ldots, \alpha_d(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)$ d séries formelles en les variables $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d$, à coefficients dans un anneau commutatif intègre infini R, non toutes nulles. Il existe des séries formelles $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_d$ en une variable ξ, à coefficients dans R, sans terme constant, telles que $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_d)\cdot \varphi'_i$ (où φ'_i dérive la dérivée formelle par rapport à ξ de φ_i) soit un élément non nul de $R[[\xi]]$.*

Démonstration. Choisissons les φ_i de la forme $\varphi_i = a_i\xi + b_i\xi^2$, avec les a_i et les $b_i \in R$. Si on pose $\lambda = \sum \alpha_i(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \cdot \varphi'_i$, on a

$$\lambda = \sum \alpha_i(a_1\xi + b_1\xi^2, \dots, a_d\xi + b_d\xi^2)\cdot(a_i + 2b_i\xi). \qquad \text{Si } \alpha_i = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{i,m},$$

avec $\alpha_{i,m}$ homogène de degrè m en les ξ_j, et si r est le plus petit entier tel qu'il existe j avec $\alpha_{j,r} \neq 0$, on a

$$\lambda = \Big(\sum_i a_i \cdot \alpha_{i,r}(a_1, \dots, a_d)\Big)\cdot \xi^r + \Big(\sum_i a_i \cdot \alpha_{i,r+1}(a_1, \dots, a_d)$$
$$+ \sum_j 2b_j \cdot \alpha_{j,r}(a_1, \dots, a_d) + \sum_{i,j} a_i b_j \cdot \frac{\partial \alpha_{i,r}}{\partial \xi_j}(a_1, \dots, a_d)\Big)\cdot \xi^{r+1} + \dots .$$

- Si $\sum_i \xi_i \cdot \alpha_{i,r}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \neq 0$, on peut, comme R est infini, trouver $a_1, a_2, \dots, a_d$ tels que $\sum a_i \cdot \alpha_{i,r}(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ et on a alors $\lambda \neq 0$ quelque soit le choix des b_i.

- Si $\sum_i \xi_i \cdot \alpha_{i,r}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = 0$, mais $\sum_i \xi_i \cdot \alpha_{i,r+1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \neq 0$, on peut trouver $a_1, a_2, \dots, a_d$ tels que $\sum a_i \cdot \alpha_{i,r+1}(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ si on choisit les $b_i = 0$.

- Enfin, si $\sum \xi_i \cdot \alpha_{i,r}(\xi_1, \dots, \xi_d) = 0$ et $\sum \xi_i \cdot \alpha_{i,r+1}(\xi_1, \dots, \xi_d) = 0$, on voit, en dérivant la première identité par rapport à ξ_j, que, pour tout j,

$$\alpha_{j,r}(\xi_1, \dots, \xi_d) + \sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial \alpha_{i,r}}{\partial \xi_j}(\xi_1, \dots, \xi_d) = 0.$$

On a alors

$$\lambda = \Big[\sum_j b_j \cdot \Big(2\alpha_{j,r}(a_1, \dots, a_d) + \sum_i a_i \cdot \frac{\partial \alpha_{i,r}}{\partial \xi_j}(a_1, \dots, a_d)\Big)\Big]\cdot \xi^{r+1} + \dots$$
$$= \Big(\sum_j b_j \cdot \alpha_{j,r}(a_1, \dots, a_d)\Big)\cdot \xi^{r+1} + \dots .$$

Choisissons un entier j tel que $\alpha_{j,r}(\xi_1, \dots, \xi_d) \neq 0$. On peut trouver $a_1, a_2, \dots, a_d \in R$ tels que $\alpha_{j,r}(a_1, \dots, a_d) \neq 0$ et, si on prend $b_j = 1$ et les autres b_i nuls, on a $\lambda \neq 0$. □

3.8. *Démonstration du lemme* 2. Pour tout groupe abélien H, posons $V_p(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[p^{-1}], H)$. Si l'on note J le quotient $X(\bar{K})/X_{p^\infty}(\bar{K})$, c'est un groupe uniquement p-divisible et la suite exacte

$$0 \to X_{p^\infty}(\bar{K}) \to X(\bar{K}) \to J \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to V_p(X_{p^\infty}(\bar{K})) \to V_p(X) \to J \to 0.$$

Comme $V_p(X_{p^\infty}(\bar{K})) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(X)$, le noyau de la flèche canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(V_p(X), C(1))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(T_p(X), C(1))$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(J, C(1))$.

Mais $X(\bar{K})$ est la réunion des $X(L)$ pour L parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\bar{K}$, donc $J = \bigcup J^H$, pour H parcourant les sous-groupes ouverts invariants de G. Si $v: J \to C(1)$ est un $\mathbf{Z}[G]$-

homomorphisme, on a, pour tout sous-groupe ouvert invariant H de G, $\nu(J^H) \subset (C(1))^H = 0$ (cf. [9], prop. 8), donc $\nu(J) = \bigcup \nu(J^H) = 0$ et $\nu = 0$. □

§4. «Décomposition de Hodge-Tate» des Schémas en Groupes Finis

4.1. Soit J un schéma en groupes commutatifs, fini et plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ et soit B son algèbre affine. On a donc $J = \mathrm{Spec}\,B$, la multiplication $m_J: J \times J \to J$ est induite par la comultiplication $m_J^*: B \to B \otimes_{\mathcal{O}_K} B$ et l'élément-neutre du groupe s'identifie à l'homomorphisme d'augmentation $\varepsilon_J^*: B \to \mathcal{O}_K$.

Si B^1 (resp. B^2) désigne le noyau de ε_J^* (resp. le carré de l'idéal B^1), et si M est un $\mathcal{O}_K$-module, on appelle

- *espace tangent de J à valeurs dans M* le $\mathcal{O}_K$-module $t_J(M) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(B^1/B^2, M)$ des applications $\mathcal{O}_K$-linéaires de B^1/B^2 dans M,
- *espace cotangent de J à valeurs dans M* le $\mathcal{O}_K$-module

$$t_J^*(M) = M \otimes_{\mathcal{O}_K} (B^1/B^2).$$

Si S est une $\mathcal{O}_K$-algèbre et si M est un S-module (en particulier si $M = S$), $t_J(M)$ et $t_J^*(M)$ ont une structure naturelle de S-modules.

On remarquera que, pour un schéma en groupes fini, B^1/B^2 est un $\mathcal{O}_K$-module de longueur finie et qu'en particulier $t_J(\mathcal{O}_K) = 0$.

4.2. Si A est un anneau commutatif et R une A-algèbre, associative, commutative et unitaire, nous notons $I_{R/A}$ l'idéal de $R \otimes_A R$, noyau de l'application de $R \otimes_A R$ dans R induite par la multiplication et $x \mapsto \bar{x}$ la projection de $I_{R/A}$ sur $I_{R/A}/I_{R/A}^2$. Rappelons que le R-module $\Omega_A(\mathrm{R})$ des A-différentielles de l'anneau R s'identifie au quotient $I_{R/A}/I_{R/A}^2$ où

- pour tout $x \in R$, $\mathrm{d}x = \overline{1 \otimes x - x \otimes 1}$,
- pour tout $x \in R$, tout $y \in I_{R/A}$, $x \cdot \bar{y} = \overline{(x \otimes 1) \cdot y}$.

4.3. Revenons au schéma en groupes J considéré au n° 4.1. On note $\underline{\omega}_J$ le $\mathcal{O}_K$-module des différentielles invariantes de J. C'est donc le sous-$\mathcal{O}_K$-module de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ formé des ω vérifiant

$$m_J^* \omega = i_1^* \omega + i_2^* \omega$$

(où i_1^*, i_2^*: $B \to B \otimes_{\mathcal{O}_K} B$ sont définies par $i_1^*(b) = b \otimes 1$ et $i_2^*(b) = 1 \otimes b$ et où l'on a noté de la même maniere les applications de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B \otimes_{\mathcal{O}_K} B)$ déduites de m_J^*, i_1^* et i_2^* par fonctorialité).

Rappelons (cf., par exemple, [2], prop. 8.1, p. 53) comment on peut identifier $\underline{\omega}_J$ à $t_J^*(\mathcal{O}_K)$: le diagramme

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\delta"'] & J \arrow[d, "\nu"] \\ J \times J \arrow[r, "\mu"] & J \times J \end{tikzcd}$$

(où $\delta(x) = (x, x)$, $\nu(x) = (x, 0)$, $\mu(x, y) = (x, y - x)$) est commutatif. Il induit donc sur les algèbres affines un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B & B \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\
B \otimes_{\mathcal{O}_K} B \arrow[u, "\text{produit}"] & B \otimes_{\mathcal{O}_K} B \arrow[l, "\mu_J^*"'] \arrow[u, "\mathrm{id}_B \otimes \varepsilon_J^*"']
\end{tikzcd}$$

(si $\sigma_J^*\colon B \to B$ est l'endomorphisme de B qui correspond à la flèche $x \mapsto -x$ dans J, on a $\mu_J^*(b \otimes c) = (b \otimes 1) \cdot (\sigma_J^* \otimes \mathrm{id})(m_J^*(c))$, si $b, c \in B$); les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales sont surjectives. Les noyaux de ces dernières, i.e. $I_{B/\mathcal{O}_K}$ et $B \otimes_{\mathcal{O}_K} B^1$ s'identifient donc. On en déduit une identification de

$$\Omega_{\mathcal{O}_K}(B) = I_{B/\mathcal{O}_K} / I_{B/\mathcal{O}_K}^2 \quad \text{sur} \quad B \otimes_{\mathcal{O}_K} B^1/B^2 = B \otimes_{\mathcal{O}_K} t_J^*(\mathcal{O}_K).$$

On vérifie que, dans cette identification, $\underline{\omega}_J$ correspond à $t_J^*(\mathcal{O}_K)$ (identifié à un sous-$\mathcal{O}_K$-module de $B \otimes_{\mathcal{O}_K} t_J^*(\mathcal{O}_K)$ par l'application $x \mapsto 1 \otimes x$).

Remarque. On ne change pas l'identification de $\underline{\omega}_J$ à $t_J^*(\mathcal{O}_K)$ si l'on remplace simultanément $\mathrm{d}x = 1 \otimes x - x \otimes 1$ et $\mu(x, y) = (x, x - y)$ par $\mathrm{d}x = x \otimes 1 - 1 \otimes x$ et $\mu(x, y) = (x, y - x)$, grâce à deux changements de signe qui se compensent.

4.4. Pour tout $\mathcal{O}_K$-module M, soit $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$ le module des $\mathcal{O}_K$-dérivations de B dans M (où la structure de B-module de M est définie par $bx = \varepsilon_J^*(b) \cdot x$, pour tout $b \in B$, tout $x \in M$).

D'après la propriété universelle du module des différentielles, $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$ s'identifie au module $\mathscr{L}_B(\Omega_{\mathcal{O}_K}(B), M)$ des applications B-linéaires de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ dans M. Comme $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ s'identifie à $B \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_J$, $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$ s'identifie aussi au module des applications $\mathcal{O}_K$-linéaire de $\underline{\omega}_J$ dans M, ou encore à $t_J(M)$.

Soit B' l'algèbre affine du dual de Cartier J' de J. C'est donc le $\mathcal{O}_K$-module des applications $\mathcal{O}_K$-linéaires de B dans $\mathcal{O}_K$, la multiplication étant définie par

$$(u v)(x) = (u \otimes v)(m_J^* x), \qquad \text{si } u, v \in B' \quad \text{et} \quad x \in B,$$

et la comultiplication $m_{J'}^*$ par

$$(m_{J'}^* u)(x \otimes y) = u(x y), \qquad \text{si } u \in B' \quad \text{et} \quad x, y \in B.$$

Si M est un $\mathcal{O}_K$-module, nous notons $\underline{\alpha}_{J'}(M)$ le noyau de l'application $\delta_{J', M}\colon M \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \to M \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ définie par

$$\delta_{J', M} = \mathrm{id}_M \otimes (i_1^* - m_{J'}^* + i_2^*).$$

Lorsque l'on identifie $M \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ à $\mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$, on voit que $\underline{\alpha}_{J'}(M)$ s'identifie au sous-module de $\mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$ formé des u qui vérifient

$$u(x y) = \varepsilon_J^*(x)\, u(y) + \varepsilon_J^*(y)\, u(x), \qquad \text{pour tout } x, y \in B,$$

autrement dit à $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_K}(B, M)$ ou encore à $t_J(M)$.

4.5. On sait que le groupe $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ s'identifie au sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')^X$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ formé des x

vérifiant $m^*x = x \otimes x$ [où

$$m^*: \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \to (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')$$

désigne la comultiplication dans l'algèbre affine de $J' \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K} \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\bar{K}}$, autrement dit est l'application composée

$$\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} \otimes m_{J'}^*} \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$$
$$\xrightarrow{\text{iso. can.}} (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')].$$

L'application $x \mapsto dx/x$ définit un homomorphisme de $(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')^X$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B')$, d'où par extension des scalaires, une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\hat{\varphi}_J: \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'),$$

qui commute aux actions évidentes de $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Or on a $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') = (\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')) \oplus (\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B')$ (où, rappelons-le $\Omega = \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$). Du fait que, pour tout $x \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, on a $m^*x = x \otimes x$ résulte facilement que

- l'image du composé de $\hat{\varphi}_J$ avec la projection sur $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$ est contenue dans $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_{J'}$, qui s'identifie (n° 4.3) à $t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$;

- l'image du composé de $\hat{\varphi}_J$ avec la projection sur $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ est contenue dans $\underline{\alpha}_{J'}(\Omega)$ qui s'identifie (n° 4.4) à $t_J(\Omega)$.

Finalement, on obtient ainsi une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\varphi_J = \varphi_J^0 \oplus \varphi_J^1: \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \oplus t_J(\Omega)$$

qui commute bien sûr aux actions évidentes de G.

4.6. Nous nous proposons de montrer que φ_J est «presqu'un isomorphisme», i.e. que l'exposant du noyau et du conoyau de φ_J sont bornés indépendamment de J et que la transposée de $\varphi_{J'}$ (où J' est toujours le dual de Cartier de J) est «le presqu'isomorphisme» réciproque.

Pour cela, nous allons commencer par donner une autre description de φ_J^1, puis une autre description de φ_J^0.

4.7. Pour tout $\omega \in \underline{\omega}_J$ et tout $u \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, soit $u^*(\omega)$ l'image réciproque de ω par u (autrement dit, si l'on identifie $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ à l'ensemble des homomorphismes de la $\mathcal{O}_K$-algèbre B dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, $u^*(\omega)$ est la forme différentielle $\in \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ image de $\omega \in \underline{\omega}_J \subset \Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ par l'application de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ déduite de u par fonctorialité).

L'application

$$(u, \omega) \mapsto u^*(\omega)$$

de $J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \times \underline{\omega}_J$ dans Ω est $\mathbf{Z}_p$-linéaire en la première variable et $\mathcal{O}_K$-linéaire en la seconde. Elle induit une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire de $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ dans $\mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(\underline{\omega}_J, \Omega) = t_J(\Omega)$, d'où, par extension des scalaires, une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\eta_J^1: \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to t_J(\Omega).$$

Proposition 6. *On a* $\eta_J^1 = \varphi_J^1$.

Démonstration. L'application $u \mapsto 1 \otimes u$ identifie $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ à un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et il suffit de vérifier que, pour tout $u \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, on a bien $\eta_J^1(u) = \varphi_J^1(u)$.

On a $t_J(\Omega) = \mathcal{L}_{\mathcal{O}_K}(B^1/B^2, \Omega) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{O}_K}(B^1, \Omega)$ et il suffit de vérifier que, pour tout $u \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, tout $b \in B^1$, on a

$$\eta_J^1(u)(b) = \varphi_J^1(u)(b).$$

Soit $(b_i)_{i=1,\dots,r}$ une base de B comme $\mathcal{O}_K$-module et soit $(b'_j)_{j=1,\dots,r}$ la base duale de B'. Si l'on considère u comme un homomorphisme de B dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, il s'identifie à l'élément $\sum_{i=1}^{r} u(b_i) \otimes b'_i$ de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ et u^{-1} s'identifie à $\sum_{i=1}^{r} u^{-1}(b_i) \otimes b'_i$ (on adopte provisoirement la notation multiplicative pour le groupe $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$). Avec ces notations, $\varphi_J^1(u)$ s'identifie à l'image dans $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ de

$$\left(\sum u^{-1}(b_i) \otimes 1 \otimes b'_i\right)\left(\sum (1 \otimes u(b_j) - u(b_j) \otimes 1) \otimes b'_j\right)$$
$$\in I_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \subset \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'.$$

En particulier, pour tout $b \in B^1$, $\varphi_J^1(u)(b)$ est la projection sur Ω de

$$\sum_{i,j} (b'_i b'_j)(b) \cdot (u^{-1}(b_i) \otimes u(b_j) - u^{-1}(b_i) u(b_j) \otimes 1) \in I_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}.$$

Comme $\sum_{i,j} (b'_i b'_j)(b) \cdot u^{-1}(b_i) u(b_j) = (u^{-1} u)(b) = \varepsilon_J^*(b) = 0$, $\varphi_J^1(u)(b)$ est aussi la projection de $\sum_{i,j} (b'_i b'_j)(b) \cdot u^{-1}(b_i) \otimes u(b_j)$.

Soit, d'autre part, λ l'application composée

$$B^1 \xrightarrow{\text{proj.}} B^1/B^2 \xrightarrow{\text{iso. can.}} \underline{\omega}_J \xrightarrow{\text{incl.}} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B).$$

Alors (cf. n° 4.3), $\lambda(b)$ est la projection sur $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ de

$$((\sigma_J^* \otimes \mathrm{id}_B) \circ m_J^*)(b) \in I_{B/\mathcal{O}_K} \subset B \otimes_{\mathcal{O}_K} B.$$

L'application $u \otimes u$: $B \otimes_{\mathcal{O}_K} B \to \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}}$ envoie $I_{B/\mathcal{O}_K}$ dans $I_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}$ et induit, par passage aux quotients, l'application de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B)$ dans Ω déduite de u par fonctorialité. Par conséquent, $\eta_J^1(u)(b)$ est la projection sur Ω de $(u \otimes u)((\sigma_J^* \otimes \mathrm{id}_B) \circ m_J^*)(b) \in I_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}$ ou encore de $(u^{-1} \otimes u)(m_J^*(b))$. Comme $u^{-1} = \sum u^{-1}(b_i) \otimes b'_i$ et $u = \sum u(b_j) \otimes b'_j$, on a, avec des conventions évidentes,

$$(u^{-1} \otimes u)(m_J^*(b)) = \sum_{i,j} u^{-1}(b_i) \otimes u(b_j) \cdot (b'_i \otimes b'_j)(m_J^*(b)).$$

On a

$$(b'_i \otimes b'_j)(m_J^*(b)) = (b'_i b'_j)(b) \quad \text{et} \quad \eta_J^1(u)(b)$$

est bien l'image dans Ω de $\sum_{i,j} (b'_i b'_j)(b) \cdot u^{-1}(b_i) \otimes u(b_j)$. $\square$

4.8. Si u: $B \to \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un élément de $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et si $\sum \omega_i \otimes b_i \in \underline{\alpha}_J(\Omega) \subset \Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B$, on pose

$$\eta_J^0(u)\left(\sum \omega_i \otimes b_i\right) = \sum u(b_i) \omega_i.$$

On a ainsi défini une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire

$$\eta_J^0\colon J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \mathscr{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(\underline{\alpha}_J(\Omega), \Omega).$$

En tant que $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module, Ω est isomorphe (non canoniquement) à $\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et est donc dualisant pour les $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-modules de longueur finie. Comme $\underline{\alpha}_J(\Omega)$ s'identifie à

$$t_{J'}(\Omega) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(B'^1/B'^2, \Omega) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} (B'^1/B'^2), \Omega),$$

$\mathscr{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(\underline{\alpha}_J(\Omega), \Omega)$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} (B'^1/B'^2) = t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Ceci nous permet de considérer η_J^0 comme une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire de $J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ dans $t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$; nous notons encore de la même manière l'application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire

$$\eta_J^0\colon \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

déduite par extension des scalaires.

Proposition 7. *On a* $\eta_J^0 = \varphi_J^0$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\eta_J^0(u) = \varphi_J^0(u)$, pour tout $u \in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Si on conserve les notations du n° précédent, on a $u = \sum u(b_i) \otimes b_i'$, $u^{-1} = \sum u^{-1}(b_i) \otimes b_i'$ et $\varphi_J^0(u)$ est l'image dans $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$ de

$$\alpha = (\textstyle\sum u^{-1}(b_i) \otimes b_i' \otimes 1)(\sum u(b_j) \otimes (1 \otimes b_j' - b_j' \otimes 1)$$
$$\in \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} I_{B'/\mathcal{O}_K} \subset \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B' \otimes_{\mathcal{O}_K} B'.$$

Comme $1 = 1 \otimes 1 = u^{-1} u = \sum_{i,j} u^{-1}(b_i) u(b_j) \otimes b_i' b_j'$, on a $\alpha = \alpha' - 1$, avec

$$\alpha' = \sum_{i,j} u^{-1}(b_i) u(b_j) \otimes b_i' \otimes b_j'.$$

D'autre part l'application de B' dans B'^1/B'^2

$$B' \xrightarrow{\mathrm{id}_{B'} - \varepsilon_{J'}^*} B'^1 \xrightarrow{\text{proj.}} B'^1/B'^2$$

induit, par extension des scalaires, une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire de $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes B'^1/B'^2 = t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et on voit que $\eta_J^0(u)$ n'est autre que l'image de $\sum u(b_i) \otimes b_i'$ par cette application.

Soit alors λ' l'application composée

$$B' \xrightarrow{\mathrm{id}_{B'} - \varepsilon_{J'}^*} B'^1 \xrightarrow{\text{proj.}} B'^1/B'^2 \xrightarrow{\text{iso. can.}} \underline{\omega}_{J'} \xrightarrow{\text{incl.}} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B').$$

Si l'on identifie maintenant $t_{J'}^*(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ à $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_{J'} \subset \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$, alors $\eta_J^0(u) = \sum u(b_i) \otimes \lambda'(b_i')$.

On voit que $\lambda'(b_i')$ est la projection sur $\Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$ de

$$((\sigma_{J'}^* \otimes \mathrm{id}_{B'}) \circ m_{J'}^*)(b_i') - \varepsilon_{J'}^*(b_i') \in I_{B'/\mathcal{O}_K} \subset B' \otimes_{\mathcal{O}_K} B';$$

donc que $\eta_J^0(u)$ est l'image, dans $\mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$ de

$$\beta = \sum_i u(b_i) \otimes ((\sigma_{J'}^* \otimes \mathrm{id}_{B'}) \circ m_{J'}^*)(b_i') - \sum_i u(b_i) \cdot \varepsilon_{J'}^*(b_i').$$

On a $\beta=\beta'-1$, avec

$$\beta'=\sum u(b_i)\otimes((\sigma_{J'}^*\otimes \mathrm{id}_{B'})\circ m_{J'}^*)(b_i'),$$

car $\sum_i u(b_i)\cdot \varepsilon_{J'}^*(b_i')=\varepsilon_{J'}^*(\sum u(b_i)\otimes b_i')=\varepsilon_{J'}^*(u)=1$ (où l'on a encore noté $\varepsilon_{J'}^*$ l'application $\mathcal{O}_{\bar K}$-linéaire de $\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ dans $\mathcal{O}_{\bar K}$ déduite de $\varepsilon_{J'}^*$ par extension des scalaires).

Il suffit donc de vérifier que $\beta'=\alpha'$. L'application

$$\rho\colon\ \mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathcal{O}_K} B'\otimes_{\mathcal{O}_K} B'\to \mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathcal{O}_K} B'\otimes_{\mathcal{O}_K} B',$$

définie par $\rho(a\otimes b'\otimes c')=a\otimes \sigma_{J'}^*(b')\otimes c'$, est un automorphisme et il suffit de vérifier que $\rho(\beta')=\rho(\alpha')$.

Or on a $\rho(\beta')=\sum_i u(b_i)\otimes m_{J'}^*(b_i')$. Mais

$$u=\sum u(b_j)\otimes b_j'=\sum u^{-1}(b_i)\otimes \sigma_{J'}^*(b_i')$$

et l'égalité $m^* u=u\otimes u$ s'écrit

$$\sum_i u(b_i)\otimes m_{J'}^*(b_i')=(\sum u^{-1}(b_i)\otimes \sigma_{J'}^*(b_i')\otimes 1)\cdot(\sum u(b_j)\otimes 1\otimes b_j'),$$

ou encore

$$\sum_i u(b_i)\otimes m_{J'}^*(b_i')=\sum_{i,j} u^{-1}(b_i)\, u(b_j)\otimes \sigma_{J'}^*(b_i')\otimes b_j',$$

c'est-à-dire $\rho(\beta')=\rho(\alpha')$.

4.9. **Proposition 8.** *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar K}))\times(\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathbf{Z}_p} J'(\mathcal{O}_{\bar K})) & \xrightarrow{\varphi_J\times\varphi_{J'}} & t_{J'}^*(\mathcal{O}_K)\oplus t_J(\Omega)\oplus t_J^*(\mathcal{O}_K)\oplus t_{J'}(\Omega)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle v}\\
(\bar K/\mathcal{O}_{\bar K})(1) & \xrightarrow{\ \tilde\xi\ } & \Omega
\end{array}$$

[– *où θ est la flèche déduite par extension des scalaires de la flèche θ_0: $J(\mathcal{O}_{\bar K})\times J'(\mathcal{O}_{\bar K})\to \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ induite par la dualité de Cartier (on a*

$$\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}=\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)(1)=(\bar K/\mathcal{O}_{\bar K})(1)),$$

– *où $\tilde\xi$ est la flèche déduite par passage au quotient de l'application ξ: $\bar K(1)\to\Omega$ définie au n° 1.6, th. 1' (le noyau $\mathfrak{a}_{\bar K}(1)$ de ξ contient $\mathcal{O}_{\bar K}(1)$),*

– *où, avec des notations évidentes, $v(a',\lambda,a,\lambda')=\lambda(a)+\lambda'(a')$] est commutatif.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la commuttivité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
J(\mathcal{O}_{\bar K})\times J'(\mathcal{O}_{\bar K}) & \xrightarrow{\varphi_J\times\varphi_{J'}} & t_{J'}^*(\mathcal{O}_K)\oplus t_J(\Omega)\oplus t_J^*(\mathcal{O}_K)\oplus t_{J'}(\Omega)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\theta_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle v}\\
\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} & \xrightarrow{\ d_{\log}\ } & \Omega.
\end{array}$$

Conservons les notations des n$^{\text{os}}$ précédents et soient $u\in J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, $v\in J'(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On considère u comme l'élément $\sum u(b_i)\otimes b'_i$ de $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K} B'$ et v comme un homomorphisme de B' dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Si $(\varphi_J\times\varphi_{J'})(u,v)=(a',\lambda,a,\lambda')$, alors

– d'une part $a'=\varphi_J^0(u)=(\sum u(b_j)\otimes b'_j)^{-1}\cdot(\sum u(b_i)\cdot d b'_i)$, tandis que $\lambda'=\varphi^1_{J'}(v)=\eta^1_{J'}(v)$ (prop. 6) s'identifie à l'application $\omega\mapsto v^*(\omega)$; d'où

$$\lambda'(a')=(\textstyle\sum u(b_j)\,v(b'_j))^{-1}\cdot(\sum u(b_i)\,d\,v(b'_i));$$

– d'autre part, $\lambda=\varphi^1_J(u)=(\sum u(b_j)\otimes b'_j)^{-1}\cdot(\sum d\,u(b_i)\otimes b'_i)$, tandis que $a=\varphi^0_J(v)=\eta^0_J(v)$ (prop. 7) s'identifie à l'application $\sum\omega_i\otimes b'_i\mapsto\sum v(b'_i)\,\omega_i$; d'où

$$\lambda(a)=(\textstyle\sum u(b_j)\,v(b'_j))^{-1}\cdot(\sum v(b'_i)\,d\,u(b_i)).$$

On a donc

$$\begin{aligned}(v\cdot(\varphi_J\times\varphi_{J'}))(u,v)&=(\textstyle\sum u(b_j)\,v(b'_j))^{-1}\cdot(\sum u(b_i)\,d\,v(b'_i)+\sum v(b'_i)\,d\,u(b_i))\\&=d_{\log}(\textstyle\sum u(b_i)\,v(b'_j))=d_{\log}(\theta_0(u,v)).\quad\square\end{aligned}$$

4.10. Si l'application $\tilde{\xi}$ était un isomorphisme, la proposition 8 signifierait que φ_J est un isomorphisme et que la transposée de $\varphi_{J'}$ est son inverse. En fait, il intervient ici deux modules dualisant différents, $(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}})(1)$ et Ω, pour les $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-modules de longueur finie.

Aussi, si M est un $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module de longueur finie, nous posons $M'=\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(M,(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}})(1))$, $M^*=\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(M,\Omega)$ et nous notons $\xi_M\colon M'\to M^*$ l'application induite par $\tilde{\xi}\colon(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}})(1)\to\Omega$.

Si M et N sont deux $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-modules de longueur finie, et si $\alpha\colon M\to N$ est une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire, nous notons $\alpha'\colon N'\to M'$ et $\alpha^*\colon N^*\to M^*$ les applications déduites par fonctorialité. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\xi_N"'] & M' \arrow[d, "\xi_M"] \\ N^* \arrow[r, "\alpha^*"] & M^* \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Revenons au schéma en groupes J. Il est clair que $(\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J'(\mathcal{O}_{\bar{K}}))'$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ tandis que $(t^*_J(\mathcal{O}_{\bar{K}}))^*$ s'identifie à $t_J(\Omega)$ et $(t_{J'}(\Omega))^*$ à $t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. La proposition 8 peut alors se reformuler ainsi:

Théorème 3. *Pour tout schéma en groupes commutatifs J, fini et plat sur* Spec$\mathcal{O}_K$, *les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \arrow[r, "\varphi^0_J\times\varphi^1_J"] \arrow[dr, "\text{iso.can.}"'] & t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\bar{K}})\oplus t_J(\Omega) \arrow[r, "(\varphi^1_{J'})^*\oplus(\varphi^0_J)^*"] & (\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J'(\mathcal{O}_{\bar{K}}))^* \\ & (\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J'(\mathcal{O}_{\bar{K}}))' \arrow[ur, "\xi_{\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J'(\mathcal{O}_{\bar{K}})}"'] & \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] (t_{J'}(\Omega))'\oplus(t^*_J(\mathcal{O}_{\bar{K}}))' \arrow[r, "(\varphi^1_{J'})'\times(\varphi^0_{J'})'"] \arrow[dr, "\xi_{t_{J'}(\Omega)}\oplus\xi_{t^*_J(\mathcal{O}_{\bar{K}})}"'] & \mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}J(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \arrow[r, "\varphi^0_J\oplus\varphi^1_J"] & t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\bar{K}})\oplus t_J(\Omega) \\ & (t_{J'}(\Omega))^*\oplus(t^*_J(\mathcal{O}_{\bar{K}}))^* \arrow[ur, "\text{iso.can.}"'] & \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. $\square$

Corollaire. *Soit a un élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifiant $v(a)=\frac{1}{p-1}+v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$ (où v est la valuation de $\bar{K}$ normalisée par $v(p)=1$). Alors le noyau et le conoyau de*

$$\varphi_J\colon\ \mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathbf{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\bar{K}})\to t_{J'}^{*}(\mathcal{O}_{\bar{K}})\oplus t_J(\Omega)$$

sont tués par a.

Démonstration. Le noyau de ξ est formé des éléments de $(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}})(1)$ tués par a (th. 1′ du n° 1.6) et on en déduit que, pour tout $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-module M de longeur finie, le noyau et le conoyau de ξ_M sont tués par a et l'assertion résulte alors immédiatement du théorème. □

4.11. *Remarque.* Il est facile de vérifier directement, i.e. sans utiliser les propositions 6 et 7 que le noyau de φ_J est tué par a:

Soient $\Gamma=J(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $\Gamma'=J'(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. L'anneau $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}B'$ s'identifie à une sous-$\mathcal{O}_{\bar{K}}$-algèbre de l'algèbre $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{\Gamma'}$ des fonctions sur Γ' à valeurs dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$; d'où une application $\mathcal{O}_{\bar{K}}$-linéaire de $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}B')$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\bar{K}}^{\Gamma'})=\Omega^{\Gamma'}$. Si on note $\bar{\varphi}_J$ le composé de φ_J avec cette application, le noyau de φ_J est contenu dans celui de $\bar{\varphi}_J$ et il suffit de montrer que $a\cdot\ker\bar{\varphi}_J=0$.

Choisissons une «base» de Γ', i.e. des éléments $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ non nuls de Γ' tels que Γ' soit la somme directe des groupes cycliques engendrés par les e'_j. Soit p^s l'exposant de Γ' et soit p^{s-t_j}, avec $0\leqq t_j<s$, l'ordre de e'_j.

Lorsque l'on identifie $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}B'$ à un sous-anneau de $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{\Gamma'}$, Γ s'identifie au sous-groupe $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma',\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ du groupe multiplicatif de $\mathcal{O}_{\bar{K}}^{\Gamma'}$. Si on choisit une racine primitive p^s-ième de l'unité $v\in\mathcal{O}_{\bar{K}}$, Γ est engendré par les e_i, pour $i=1,2,\ldots,m$, définis par

$$e_i(e'_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i\neq j,\\ v^{p^{t_j}} & \text{si } i=j.\end{cases}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_m\in\mathbf{Z}$, on a $\sum x_i e_i=0$ si et seulement si, pour tout i, p^{s-t_i} divise x_i.

Soit $\alpha=\sum b_i\otimes e_i$, avec les $b_i\in\mathcal{O}_{\bar{K}}$, un élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes\Gamma$. On a $\bar{\varphi}_J(\alpha)=(\omega_u)_{u\in\Gamma'}$, avec $\omega_u=\sum b_i(d\,e_i(u)/e_i(u))$; en particulier $\omega_{e'_j}=b_j p^{t_j}\cdot(dv/v)$. Si $\alpha\in\ker\bar{\varphi}_J$, on doit donc avoir $p^{t_j}b_j\in\operatorname{Ann}(dv/v)$, pour tout j. D'après le lemme 7 du §2, on a $v(\operatorname{Ann}(dv/v))=s-\frac{1}{p-1}-v(\mathfrak{D}_{K/K_0})$ $\left(\text{on peut supposer } s\geqq\frac{1}{p-1}+v(\mathfrak{D}_{K/K_0}), \text{ sinon il n'y a rien à démontrer}\right)$; on a alors $v(ab_j)\geqq s-t_j$, donc ab_j est divisible par p^{s-t_j} qui est l'ordre de e_j et $a\alpha=0$. □

§5. Applications aux Groupes p-Divisibles

5.1. Rappelons (cf. [9], §2) qu'un groupe p-divisible (ou de Barsotti-Tate) sur $\mathcal{O}_K$ de hauteur h (où $h\in\mathbf{N}$) est la donnée s'un système inductif $H=(H_n, i_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où

(i) H_n est un schéma en groupes commutatifs, fini et plat, sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, de rang p^{nh};

(ii) pour tout $n\in\mathbf{N}$, i_n est un morphisme de H_n dans H_{n+1} qui identifie H_n au noyau de la multiplication par p^n dans H_{n+1}.

L'algèbre affine R_n de H_n est séparée et complète pour la topologie p-adique, ce qui fait que l'on peut aussi bien considérer H_n comme un schéma en groupes formel sur $\operatorname{Spf}\mathcal{O}_K$. On peut alors associer à H le schéma en groupes formel affine $\hat{H}=\varinjlim H_n$, dont l'algèbre affine est la $\mathcal{O}_K$-algèbre profinie $R=\varprojlim R_n$. Le groupe $\hat{H}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ des points de $\hat{H}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ est formé des homomorphismes continus de R dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Il a une structure naturelle de $\mathbf{Z}_p$-module et son sous-groupe de torsion n'est autre que $H(\mathcal{O}_{\bar{K}})=\varinjlim H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})$.

Le module de Tate $T_p(H)$ de H est la limite projective des $H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ (l'application de transition de $H_{n+1}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ dans $H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ étant induite par la multiplication par p); il s'identifie à

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, H(\mathcal{O}_{\bar{K}}))=\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \hat{H}(\mathcal{O}_{\bar{K}})).$$

C'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang h sur lequel G opère linéairement et continûment.

5.2. La multiplication m_H: $\hat{H}\times\hat{H}\to\hat{H}$ est induite par la comultiplication m_H^*: $R\to R\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}R$ et l'élément-neutre du groupe s'identifie à l'homomorphisme d'augmentation ε_H^*: $R\to\mathcal{O}_K$.

Si R^1 (resp. R^2) désigne le noyau de ε_H^* (resp. l'adhérence du carré de l'idéal R^1), et si M est un $\mathcal{O}_K$-module, on appelle *espace tangent de H à valeurs dans M* le $\mathcal{O}_K$-module $t_H(M)=\mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(R^1/R^2, M)$ et *espace cotangent de H à valeurs dans M* le $\mathcal{O}_K$-module $t_H^*(M)=M\otimes_{\mathcal{O}_K}(R^1/R^2)$.

Si S est une $\mathcal{O}_K$-algèbre et si M est un S-module, $t_H(M)$ et $t_H^*(M)$ sont des S-modules; comme R^1/R^2 est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang la dimension d de H, si M est un S-module libre de rang 1, $t_H(M)$ et $t_H^*(M)$ sont des S-modules libres de rang d.

5.3. Le dual (de Serre) de H est le groupe p-divisible $H'=(H'_n, i'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où

(i) H'_n est le dual de Cartier de H_n,

(ii) i'_n: $H'_n\to H'_{n+1}$ se déduit par dualité de la flèche de H_{n+1} dans H_n induite par la multiplication par p.

5.4. On note $\mathbf{Z}_p(-1)$ le dual (comme $\mathbf{Z}_p$-module) de $\mathbf{Z}_p(1)=T_p(\mathbf{G}_m)$; c'est donc un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang 1 sur lequel G opère par multiplication par le caractère χ^{-1}. Pour tout $\mathbf{Z}_p$-module M avec action linéaire de G, on pose $M(-1)=M\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p(-1)$.

On sait, depuis Tate ([9], cor. 2, p. 180), qu'il existe un isomorphisme canonique (de C-espaces vectoriels avec action de G), fonctoriel en H, de $t_{H'}(C)\oplus t_H^*(C(-1))$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe,

(i) de rappeler (n° 5.5) la construction de l'isomorphisme de Tate, que nous noterons $\theta_{H,\mathrm{Tate}}$;

(ii) de transposer (n° 5.6 et 5.7) ce qui a été fait au §3 pour les variétés abéliennes pour obtenir un «autre» isomorphisme $\theta_{H,\mathrm{formel}}$;

(iii) de déduire (n° 5.8 à 5.10), par passage à la limite, des résultats du paragraphe 4 un troisième isomorphisme $\theta_{H,\mathrm{fini}}$;

(iv) de montrer (n° 5.11 à 5.13) que $\theta_{H,\mathrm{Tate}}=\theta_{H,\mathrm{formel}}=\theta_{H,\mathrm{fini}}$.

Tout comme le théorème 2 du §3, les constructions de $\theta_{H,\mathrm{Tate}}$ et $\theta_{H,\mathrm{formel}}$ utilisent, de manière essentielle, les résultats généraux de Tate sur la décomposition de Hodge-Tate, à savoir le fait que, si T est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang fini, avec action linéaire et continue de G, et si

$$(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^0=(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^G,$$
$$(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^1=\{x\in C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T \mid gx=\chi(g)\cdot x, \text{ pour tout } g\in G\},$$

alors l'application canonique de $(C\otimes_K(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^0)\oplus(C\otimes_K(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^1)$ dans $C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T$ est injective (cf. [7], prop. 4, p. 122).

La construction de $\theta_{H,\mathrm{fini}}$ au contraire fournit une décomposition a priori de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$ en somme directe de deux sous-C-espaces vectoriels stables par G, l'un se trouvant être isomorphe à une somme directe de copies de C et l'autre à une somme directe de copies de $C(1)$.

5.5. Si $H'=(H'_n, i'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est le dual de H et si $\hat{H}'=\varinjlim H'_n$, on sait que $H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(H'_n\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{\bar{K}}, \boldsymbol{\mu}_{p^n})=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(H'_n\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_C, \boldsymbol{\mu}_{p^n}),$$

donc que $T_p(H)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\hat{H}'\,\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_C, \hat{\boldsymbol{\mu}}_{p^\infty})$ (où $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{p^\infty}=\varinjlim \boldsymbol{\mu}_{p^n}$).

On en déduit un accouplement

$$T_p(H)\times t_{H'}(C)\to t_{\hat{\boldsymbol{\mu}}_{p^\infty}}(C)\overset{\text{can.}}{\simeq}C,$$

d'où une application C-linéaire, commutant à l'action de G, de $t_{H'}(C)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$, qui, par restriction à $t_{H'}(K)$, donne une application K-linéaire

$$\theta^1_{H,\mathrm{Tate}}\colon\ t_{H'}(K)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C).$$

Tate montre ([9], prop. 11, step 5) que $\theta^1_{H,\mathrm{Tate}}$ est injective. La théorie de la décomposition de Hodge-Tate, un argument de dualité et un comptage de dimensions montrent (par un raisonnement entièrement analogue à celui développé au n° 3.2) que

(i) $\theta^1_{H,\mathrm{Tate}}$ est un isomorphisme;

(ii) le K-espace vectoriel dual de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H'), C)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C(1))$ et l'isomorphisme réciproque de la transposée de

$$\theta^1_{H',\mathrm{Tate}}\colon\ t_H(K)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H'), C)$$

fournit donc un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\theta^0_{H,\mathrm{Tate}}\colon\ t^*_H(K)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C(1));$$

(iii) en composant $\theta^1_{H,\mathrm{Tate}}$ avec l'inclusion de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$ et en étendant les scalaires, on obtient une application C-linéaire, commutant à l'action de G,

$$\theta^1_{H,\mathrm{Tate},C}\colon\ t_{H'}(C)\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$$

qui est injective;

(iv) de même $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C(1))(-1)$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$; par fonctorialité, $\theta^0_{H,\mathrm{Tate}}$ induit une application K-linéaire de $t^*_H(K(-1))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$, d'où, par extension des scalaires, une application C-linéaire, commutant à l'action de G,

$$\theta^0_{H,\mathrm{Tate},C}\colon\ t^*_H(C(-1)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$$

qui est injective;

(v) l'application

$$\theta_{H,\mathrm{Tate}} = \theta^1_{H,\mathrm{Tate},C} \oplus \theta^0_{H,\mathrm{Tate},C}\colon t_{H'}(C) \oplus t^*_H(C(-1)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C)$$

est un isomorphisme.

5.6. Soit toujours R l'algèbre affine du groupe formel $\hat{H} = \varinjlim H_n$ et soit $\Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(R)$ le R-module des $\mathcal{O}_K$-différentielles «continues» de R (i.e. la solution du problème universel habituel pour les dérivations *continues;* si R_n désigne l'algèbre affine de R_n, c'est aussi la limite projective des $\Omega_{\mathcal{O}_K}(R_n)$).

Soient $m^*_H\colon R \to R \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} R$ la comultiplication et $i^*_1, i^*_2\colon R \to R \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} R$ les applications définies par $i^*_1(x) = x \hat{\otimes} 1$ et $i^*_2(x) = 1 \hat{\otimes} x$; si l'on note de la même manière les applications de $\Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(R)$ dans $\Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(R \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_K} R)$ déduites de m^*_H, i^*_1 et i^*_2 par fonctorialité, le module $\underline{\omega}_H$ des différentielles invarantes de H est le sous-$\mathcal{O}_K$-module de $\Omega^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}_K}(R)$ formé des ω qui vérifient

$$m^*_H(\omega) = i^*_1(\omega) + i^*_2(\omega).$$

On a un accouplement

$$\underline{\omega}_H \times \hat{H}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \to \Omega:$$

c'est celui qui à (ω, u) associe l'image réciproque $\langle \omega, u \rangle = u^*(\omega)$ de ω par u. Il est $\mathcal{O}_K$-linéaire en la première variable et $\mathbf{Z}_p[G]$-linéaire en la sedonde et induit donc une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $\underline{\omega}_H$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(\hat{H}(\mathcal{O}_{\bar{K}}), \Omega)$. Si $V_p(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \hat{H}(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$ et $V_p(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p, \Omega)$, on en déduit, par fonctorialité, une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $\underline{\omega}_H$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(V_p(H), V_p(\Omega))$ et, par extension des scalaires, une application K-linéaire

$$\hat{\rho}_H\colon\ K \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_H \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(V_p(H), V_p(\Omega)),$$

et, par restriction, une application K-linéaire

$$\rho_H\colon\ K \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_H \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), V_p(\Omega)).$$

Il est clair que $\hat{\rho}_H$ et ρ_H dépendent fonctoriellement de H.

Proposition 9. *L'application ρ_H définie ci-dessus est injective.*

C'est la même *démonstration* que celle de la proposition 5 du §3. Nous ne la refaisons pas. □

5.7. On sait que $\underline{\omega}_H$ s'identifie à $t^*_H(\mathcal{O}_K)$ (cela se passe comme pour les schémas en groupes finis, voir le nº 4.3), donc que $K \otimes_{\mathcal{O}_K} \underline{\omega}_H$ s'identifie à $t^*_H(K)$. Comme, par le théorème 1′, $V_p(\Omega)$ s'identifie à $C(1)$, ρ_H s'identifie à une application K-linéaire

$$\theta^0_{H,\text{formel}}\colon\ t^*_H(K)\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C(1)).$$

En procédant comme au n° 5.5, on voit que

(i) $\theta^0_{H,\text{formel}}$ est un isomorphisme;

(ii) par dualité, ..., l'application $\theta^0_{H',\text{formel}}$ induit un isomorphisme

$$\theta^1_{H,\text{formel}}\colon\ t_{H'}(K)\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C);$$

(iii) par torsion par $\mathbf{Z}_p(-1)$ de $\theta^0_{H,\text{formel}}$ et par extensions des scalaires, on obtient un isomorphisme

$$\theta_{H,\text{formel}}=\theta^1_{H,\text{formel},C}\oplus\theta^0_{H,\text{formel},C}\colon\ t_{H'}(C)\oplus t^*_H(C(-1))\to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(T_p(H), C).$$

5.8. Conservons les notations des n$^{\text{os}}$ précédents. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, le morphisme $H_n\to\hat{H}$ de schémas en groupes formels induit une application $\mathcal{O}_K$-linéaire de $t^*_H(\mathcal{O}_K)$ dans $t^*_{H_n}(\mathcal{O}_K)$.

Proposition 10. - *Pour tout* $n\in\mathbf{N}$, *la suite*

$$0\to t^*_H(\mathcal{O}_K)\xrightarrow{p^n} t^*_H(\mathcal{O}_K)\to t^*_{H_n}(\mathcal{O}_K)\to 0$$

est exacte.

Démonstration. Comme $t^*_H(\mathcal{O}_K)$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre, la multiplication par p^n est injective.

Soit μ la projection de R sur l'algèbre affine R_n de H_n; on a $\mu(R^1)=R^1_n$, idéal d'augmentation de R_n et, par conséquent l'application canonique de $t^*_H(\mathcal{O}_K)=R^1/R^2$ dans $t^*_{H_n}(\mathcal{O}_K)=R^1_n/R^2_n$ est surjective.

Soit λ: $R\to R$ l'homomorphisme induit par la multiplication par p^n. Le noyau de μ est l'adhérence $\overline{R\cdot\lambda(R^1)}$ de l'idéal de R engendré par $\lambda(R^1)$ et, pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que $\mu^{-1}(R^2_n)=\lambda(R^1)+R^2$.

On a $\lambda(R^1)\subset\ker\mu\subset\mu^{-1}(R^2_n)$ et $\mu(R^2)=R^2_n$, donc $R^2\subset\mu^{-1}(R^2_n)$, d'où l'inclusion $\lambda(R^1)+R^2\subset\mu^{-1}(R^2_n)$.

Enfin, $\mu^{-1}(R^2_n)=R^2+\ker\mu$; comme $R=\mathcal{O}_K\oplus R^1$,

$$\ker\mu=\overline{R\cdot\lambda(R^1)}=\overline{\lambda(R^1)}+\overline{R^1\cdot\lambda(R^1)};$$

comme $\lambda(R^1)+R^2$ est fermé, $\overline{\lambda(R^1)}\subset\lambda(R^1)+R^2$ et, comme $\lambda(R^1)\subset R^1$, $R^1\cdot\lambda(R^1)$ est contenu dans R^2, de même que son adhérence puisque R^2 est fermé; finalement, on a bien $\mu^{-1}(R^2_n)\subset\lambda(R^1)+R^2$. $\square$

5.9. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on dispose (cf. n° 4.5) d'une application $\mathcal{O}_K$-linéaire

$$\varphi_{H_n}=\varphi^0_{H_n}\oplus\varphi^1_{H_n}\colon\ \mathcal{O}_K\otimes_{\mathbf{Z}_p}H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})\to t^*_{H'_n}(\mathcal{O}_{\bar{K}})\oplus t_{H_n}(\Omega).$$

Il est immédiat que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_{n+1}(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\varphi^0_{H_{n+1}}} & t^*_{H'_{n+1}}(\mathcal{O}_K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_n(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\varphi^0_{H_n}} & t^*_{H'_n}(\mathcal{O}_K), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est déduite par extension des scalaires de la multiplication par p et la flèche verticale de droite est déduite par fonctorialité de «l'inclusion» de H'_n dans H'_{n+1}, est commutatif.

Il résulte de la proposition 10 que $t^*_{H'_n}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} t^*_{H'_n}(\mathcal{O}_K)$ s'identifie au conoyau de la multiplication par p^n dans $t^*_{H'}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$, donc que

$$\varprojlim t^*_{H'_n}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \varprojlim t^*_{H'}(\mathcal{O}_{\bar{K}})/p^n t^*_{H'}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \varprojlim t^*_{H'}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \mathcal{O}_{\bar{K}}) = t^*_{H'}(\mathcal{O}_C).$$

Comme $\varprojlim \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \mathcal{O}_C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H)$, on obtient, par passage à la limite, une application $\mathcal{O}_C$-linéaire, commutant à l'action de G,

$$\varphi^0_{H,\mathcal{O}_C}\colon \mathcal{O}_C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H) \to t^*_{H'}(\mathcal{O}_C).$$

De même, il est immédiat que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_{n+1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) & \xrightarrow{\varphi^1_{H_{n+1}}} & t_{H_{n+1}}(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\bar{K}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}) & \xrightarrow{\varphi^1_{H_n}} & t_{H_n}(\Omega), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche (resp. de droite) se déduit par extension des scalaires (resp. par fonctorialité) de la multiplication par p, est commutatif.

Notons Ω_n le noyau de la multiplication par p^n dans Ω. Comme H_n est tué par p^n, on a $t_{H_n}(\Omega) = t_{H_n}(\Omega_n) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(t^*_{H_n}(\mathcal{O}_K), \Omega_n) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(t^*_H(\mathcal{O}_K), \Omega_n)$ (d'après la proposition 10) $= \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(t^*_H(\mathcal{O}_C), \Omega_n)$. On en déduit que

$$\varprojlim t_{H_n}(\Omega) = \varprojlim \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(t^*_H(\mathcal{O}_C), \Omega_n) = \mathscr{L}_{\mathcal{O}_K}(t^*_H(\mathcal{O}_C), T_p(\Omega)) = t_H(T_p(\Omega))$$

(où $T_p(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, \Omega)$).

On obtient donc, par passage à la limite, une application $\mathcal{O}_C$-linéaire, commutant à l'action de G,

$$\varphi^1_{H,\mathcal{O}_C}\colon \mathcal{O}_C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H) \to t_H(T_p(\Omega)).$$

Proposition 11. *L'application*

$$\varphi_{H,\mathcal{O}_C} = \varphi^0_{H,\mathcal{O}_C} \oplus \varphi^1_{H,\mathcal{O}_C}\colon \mathcal{O}_C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H) \to t^*_{H'}(\mathcal{O}_C) \oplus t_H(T_p(\Omega)),$$

définie ci-dessus, est injective et son conoyau est un $\mathcal{O}_C$-module de longueur finie.

Démonstration. Cela résulte immédiatement du corollaire au théorème 3 (cf. n° 4.10) et de ce que $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H)$, $t^*_{H'}(\mathcal{O}_C)$ et $t_H(T_p(\Omega))$ sont des $\mathcal{O}_C$-modules libres de rang fini.

5.10. En étendant les scalaires de $\mathcal{O}_C$ à C et en utilisant le théorème 1′ pour identifier $C\otimes_{\mathcal{O}_C} T_p(\Omega)=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\Omega)=V_p(\Omega)$ à $C(1)$, on obtient un isomorphisme

$$\varphi_H=\varphi_H^0\oplus\varphi_H^1\colon\ C\otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H)\to t_{H'}^*(C)\oplus t_H(C(1)).$$

L'isomorphisme $\theta_{H,\mathrm{fini}}$ est, par définition, l'application C-linéaire transposée de φ_H.

5.11. **Proposition 11.** *Pour tout groupe p-divisible H sur $\mathcal{O}_K$, on a* $\theta_{H,\mathrm{Tate}}=\theta_{H,\mathrm{formel}}=\theta_{H,\mathrm{fini}}$.

Démonstration. En prenant les invariants par G, $\theta_{H,\mathrm{fini}}$ induit un isomorphisme

$$\theta_{H,\mathrm{fini}}^1\colon\ t_{H'}(K)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C).$$

De même, en tordant par $\mathbf{Z}_p(1)$ et en prenant les invariants par G, $\theta_{H,\mathrm{fini}}$ induit un isomorphisme

$$\theta_{H,\mathrm{fini}}^0\colon\ t_H^*(K)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p[G]}(T_p(H), C(1)).$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que, pour $i=0, 1$,
- d'une part, $\theta_{H,\mathrm{Tate}}^i=\theta_{H,\mathrm{fini}}^i$,
- d'autre part, $\theta_{H,\mathrm{formel}}^i=\theta_{H,\mathrm{fini}}^i$.

Pour tout K-espace vectoriel M, nous notons M^d son dual et, pour toute application K-linéaire $\lambda\colon M\to N$, $\lambda^d\colon N^d\to M^d$ sa transposée.

Il résulte facilement de la proposition 8 (n° 4.9) que $\theta_{H,\mathrm{fini}}^0$ est l'isomorphisme réciproque de $(\theta_{H',\mathrm{fini}}^1)^d$ et $\theta_{H,\mathrm{fini}}^1$ l'isomorphisme réciproque de $(\theta_{H',\mathrm{fini}}^0)^d$. Par construction, $\theta_{H,\mathrm{Tate}}^0$ est l'application réciproque de $(\theta_{H',\mathrm{Tate}}^1)^d$ et $\theta_{H,\mathrm{formel}}^1$ l'application réciproque de $(\theta_{H',\mathrm{formel}}^0)^d$. Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit donc de vérifier les deux lemmes suivants:

Lemme 1. *On a* $\theta_{H,\mathrm{Tate}}^1=\theta_{H,\mathrm{fini}}^1$.

Lemme 2. *On a* $\theta_{H,\mathrm{formel}}^0=\theta_{H,\mathrm{fini}}^0$.

5.12. *Démonstration du Lemme 1.* Par restriction, φ_H induit un isomorphisme

$$\varphi_{H,0}\colon\ (C\otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H))^G\to (t_{H'}^*(C)\oplus t_H(C(1)))^G=t_{H'}^*(K),$$

qui est la restriction de φ_H^0 à $(C\otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(H))^G$.

Pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que, pour tout $\lambda\in t_{H'}(C)=(t_{H'}^*(C))^d$ et tout $u\in T_p(H)$, on a

$$\theta_{H,\mathrm{Tate},C}^1(\lambda)(u)=\lambda(\varphi_H^0(u)).$$

On peut bien sûr se restreindre à $\lambda\in t_{H'}(\mathcal{O}_C)$. Mais $t_{H'}(\mathcal{O}_C)=\varprojlim t_{H'}(\mathcal{O}_{\bar K}/p^n\mathcal{O}_{\bar K})$ s'identifie à $\varprojlim \mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar K}}(\mathcal{O}_{\bar K}\otimes\underline{\omega}_{H'_n}, \mathcal{O}_{\bar K}/\mathrm{p}^n\mathcal{O}_{\bar K})$.

Soit $\lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $\lambda_n\in\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar K}}(\mathcal{O}_{\bar K}\otimes\underline{\omega}_{H'_n}, \mathcal{O}_{\bar K}/\mathrm{p}^n\mathcal{O}_{\bar K})$ et soit $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $u_n\in H_n(\mathcal{O}_{\bar K})$. Si R'_n désigne l'algèbre affine de H'_n et si on identifie $H_n(\mathcal{O}_{\bar K})$ à un sous-groupe du groupe multiplicatif de $\mathcal{O}_{\bar K}\otimes_{\mathcal{O}_K} R'_n$, on voit que

(i) $\lambda(\varphi_H^0(u))$ est la limite des $\lambda_n(\varphi_{H_n}^0(u_n))=\lambda_n(d_{\mathcal{O}_K}u_n/u_n)$ (où

$$d_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}\colon \mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}R'_n\to\Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}R'_n)=\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}\Omega_{\mathcal{O}_K}(R'_n)$$

est la différentiation);

(ii) Si $\boldsymbol{\mu}_{p^n}$ désigne le schéma en groupes, sur Spec $\mathcal{O}_K$, noyau de la multiplication par p^n dans le groupe multiplicatif, son algèbre affine est $\mathcal{O}_K[x_n]/(x_n^{p^n}-1)$, avec le coproduit défini par $m^*(x_n)=x_n\otimes x_n$; l'application $a\mapsto a\cdot(dx_n/x_n)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$ sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}\underline{\omega}_{\mu_{p^n}}$; d'où un accouplement

$$H'_n(\mathcal{O}_{\bar{K}})\times\mathcal{L}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}\otimes_{\mathcal{O}_K}\underline{\omega}_{H'_n},\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}})\to\mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

qui, à (u_n,λ_n) associe $\lambda_n(d_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}u_n/u_n)$; on voit que $\theta^1_{H,\mathrm{Tate},C}(\lambda)(u)$ est bien la limite des $\lambda_n(d_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}u_n/u_n)$, d'où le lemme. □

5.13. *Démonstration du Lemme 2.* Pour tout C-espace vectoriel M, muni d'une action de G, posons

$$M^1=\{x\in M\,|\,gx=\chi(g)\cdot x,\ \text{pour tout } g\in G\}.$$

Alors φ_H induit un isomorphisme

$$\varphi_{H,1}\colon\ (C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(H))^1\to(t^*_{H'}(C)\oplus t_H(C(1)))^1=t_H(K(1)),$$

qui est la restriction de φ^1_H à $(C\otimes_{\mathbf{Z}_p}T_p(H))^1$.

On a $t_H(K(1))=\mathcal{L}_K(t^*_H(K),K(1))\subset\mathcal{L}_K(t^*_H(K),C(1))$ et, pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que, pour tout $u\in T_p(H)$ et tout $\omega\in t^*_H(K)$, on a

$$\theta^0_{H,\mathrm{formel}}(\omega)(u)=\varphi^1_H(u)(\omega).$$

Il suffit de le vérifier lorsque $\omega\in t^*_H(\mathcal{O}_K)$. Si l'on identifie $t^*_H(\mathcal{O}_K)$ à $\underline{\omega}_H$ et $C(1)$ à $V_p(\Omega)$, on a, avec des notations évidentes, $\theta^0_{H,\mathrm{formel}}(\omega)(u)=(u^*_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}}$. Mais $\underline{\omega}_H$ s'identifie à $\varprojlim\underline{\omega}_{H_n}$ et si ω_n désigne l'image de ω dans $\underline{\omega}_{H_n}$, on a

$$\theta^0_{H,\mathrm{formel}}(\omega)(u)=(u^*_n(\omega_n))_{n\in\mathbf{N}}.$$

Par construction, $\varphi^1_H(u)(\omega)=(\varphi^1_{H_n}(u_n)(\omega_n))_{n\in\mathbf{N}}$. Mais, d'après la proposition 6 (n° 4.7), $\varphi^1_{H_n}=\eta^1_{H_n}$, donc

$$\varphi^1_{H_n}(u_n)(\omega_n)=u^*_n(\omega_n),\quad\text{d'où}\quad\varphi^1_H(u)(\omega)=(u^*_n(\omega_n))_{n\in\mathbf{N}}.\ \square$$

Références

1. Cassels, J.W.S., Frohlich, A.: Algebraic Number Theory. London-New York: Academic Press 1967
2. Fontaine, J.-M.: Groupes p-divisibles sur les corps locaux. Astérisque 47–48. Société Mathématique de France, Paris 1977
3. Fontaine, J.-M.: Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. of Maths., à paraître
4. Lubin, J., Tate, J.: Formal complex multiplication in local fields. Ann. of Maths. **81**, 380–387 (1965)
5. Serre, J.-P.: Corps locaux. Paris: Hermann, 2° éd. 1968

6. Serre, J.-P.: Abelian l-Adic Representations and Elliptic Curves. New York-Amsterdam: Benjamin 1968
7. Serre, J.-P.: Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles. In: Proceedings of a Conference on Local Fields, Edited by T.A. Springer. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
8. Serre, J.-P.: Résumé des cours de 1965–1966. Annuaire du Collège de France, pp. 49–58, Paris 1967
9. Tate, J.: p-Divisible Groups. In: Proceedings of a Conference on Local Fields, Edited by T.A. Springer. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
10. SGA7I: Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. Lect. Notes in Maths. 288. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977

Received December 19, 1980