Applications de l'Analyse à la géométrie

Exercices pour le cours 01 — Fonctions de deux variables réelles

- **Ensembles de définition**

  Déterminer et dessiner les ensembles de définition pour les fonctions suivantes

  a) $f_1(x) = \ln(2x+y-2)$

  b) $f_2(x) = \dfrac{\ln(y-x)}{x}$

  c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

  d) $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

- **Lignes de niveau**

  Dessiner les lignes de niveau L_0, L_1 et L_{-1} pour les fonctions suivantes

  a) $f_1(x) = x+2y+3$

  b) $f_2(x) = x^2+y^2$

  c) $f_3(x) = xy$.

- **Dérivées partielles**

  Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ d'ordre un, puis les dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ d'ordre deux des fonctions suivantes

  a) $f_1(x) = 4x^3+4xy^2+x^2+y^2-4x$

  b) $f_2(x) = \exp(x^2-3xy+2y^2)$.

  Que remarquez-vous ?

- **Une fonction quelque peu singulière**

  On définit la fonction $s(x, y)$ par les relations suivantes : $s(0, 0) = 0$ et $s(x, y) = \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

  a) Quel est l'ensemble de définition de s ?

  b) Calculer $s(x, 0)$ et $s(0, y)$ pour tout nombre réel x et tout nombre réel y.

  c) En déduire, en se ramenant à la définition d'une dérivée partielle, que la fonction s admet deux dérivées partielles $\dfrac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$ à l'origine, qu'on calculera.

François Dubois, 21 février 2017.

d) Calculer $s(x, x^2)$ lorsque $y = x^2$ pour tout nombre réel x.

e) En déduire que la fonction s n'est pas continue à l'origine.

- **Continuité et différentiabilité**

  On pose $f(x, y) = \sqrt{1-x-y} + \sqrt{y-x^2+1}$.

  a) Déterminer son ensemble de définition D et en faire une représentation graphique.

On pose $g(x, y) = f(x, y)$ si $(x, y) \in D$ et $g(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$.

b) Calculer $g(5, 5)$.

c) La fonction g est-elle continue au point $(5, 5)$?

d) La fonction g est-elle différentiable au point $(5, 5)$?

e) Calculer $g(1, 0)$.

f) La fonction g est-elle continue au point $(1, 0)$?

g) La fonction g possède-t-elle des dérivées partielles au point $(1, 0)$?

h) La fonction g est-elle différentiable au point $(1, 0)$?