

**Exercices pour le cours 02****Extrema des fonctions de deux variables réelles****• Etude locale de fonctions**

On pose  $f_1(x, y) = x^2 - y^2$ .

a) Montrer que le point  $(0, 0)$  est un point critique pour  $f_1$  :  $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

b) Montrer que la fonction  $f_1$  n'a ni maximum, ni minimum au point  $(0, 0)$ .

c) Calculer les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(0, 0)$ . Etablir à l'aide d'une inégalité sur ces dérivées partielles le résultat de la question b).

d) Reprendre les questions a), b) et c) avec la fonction  $f_2(x, y) = xy$ .

**• Extrema d'une fonction polynomiale**

On pose  $f(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 + x^2 + y^2 - 4x$ .

a) Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  d'ordre un, puis les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  d'ordre deux de cette fonction.

b) Quels sont les points critiques de la fonction  $f$ , c'est à dire les points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pour lesquels on a simultanément  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  ?

c) Pour chacun de ces points, déterminer s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un point col.