Applications de l'Analyse à la Géométrie

Cours 1 Fonctions de deux variables réelles

- Quelques exemples

$\alpha(x, y) = ax + by + c$, fonction affine
$f(x, y) = x^2 - y^2$
$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$h(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $h(0, 0) = 0$.
$s(x, y) = \dfrac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $s(0, 0) = 0$.

- Ensemble de définition

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles associe à tout couple (x, y) de réels un et un seul nombre $f(x, y)$ si (x, y) appartient à son ensemble de définition D. Si $(x, y) \notin D$, alors le nombre $f(x, y)$ n'existe pas.
Une fonction réelle d'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}^2$ est une application de D dans $\mathbb{R}$. A tout argument $(x, y) \in D$, on peut déterminer un et un seul nombre réel $f(x, y) \in \mathbb{R}$. Ce nombre $f(x, y)$ est l'image du point (x, y) par l'application f. On note souvent une fonction de la façon suivante $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ ou parfois sous la forme
$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ afin de condenser les deux notations.
Pour les exemples proposés ci-dessus, on a $D_\alpha = \mathbb{R}^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, disque fermé de centre l'origine et de rayon un, $D_h = \mathbb{R}^2$ et $D_s = \mathbb{R}^2$.

- Fonctions partielles

Une fonction de deux variables définit (au moins) une double infinité de fonctions à une variable. D'une part, si on se donne $b \in \mathbb{R}$, on dispose de la fonction $x \longmapsto f(x, b)$ de la première variable. D'autre part, si on se donne $a \in \mathbb{R}$, on peut définir une fonction $y \longmapsto f(a, y)$ de la seconde variable.

- Graphe

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble de définition d'une fonction f de deux variables réelles et à valeurs réelles. Le graphe de la fonction f est l'ensemble G des points de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(x, y, f(x, y))$ avec (x, y) dans l'ensemble de définition D.
On parle aussi de surface d'équation $z = f(x, y)$ pour désigner le graphe de f. Dans le cas d'une fonction affine, cette surface est un plan.

- Lignes de niveau

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables et k un nombre réel, la ligne de niveau L_k est l'ensemble des points $(x, y) \in D$ tels que $f(x, y) = k$.
Si $k \neq m$, les lignes de niveau L_k et L_m ne peuvent pas se couper.

François Dubois, 21 février 2017.

• Dérivées partielles

On se donne une fonction $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,\,y) \longmapsto f(x,\,y) \in \mathbb{R}$ de deux variables et un point $(a,\,b)$ qui appartient à l'ensemble de définition de f. On dit que f admet une dérivée partielle au point $(a,\,b)$ selon la première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a,\,b)$, si et seulement si la fonction partielle $x \longmapsto f(x,\,b)$ est dérivable au point a. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\,b) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{1}{t}\big[f(a+t,\,b) - f(a,\,b)\big]$. De même, on dit que f admet une dérivée partielle au point $(a,\,b)$ selon la deuxième variable, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a,\,b)$, si et seulement si la fonction partielle $y \longmapsto f(a,\,y)$ est dérivable au point b. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,\,b) = \lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{1}{t}\big[f(a,\,b+t) - f(a,\,b)\big]$.

Le calcul des dérivées partielles des cinq fonctions proposées en exemple est un bon exercice laissé au lecteur !

• Notion de norme

La norme euclidienne d'un point $X \equiv (x,\,y) \in \mathbb{R}^2$ (on dit souvent dans ce cas d'un vecteur X de $\mathbb{R}^2$, les deux expressions sont alors synonymes) est le nombre positif $\parallel X \parallel \equiv \sqrt{x^2+y^2}$.

On a $\parallel X \parallel \geq 0$, l'inégalité triangulaire $\parallel X+Y \parallel \leq \parallel X \parallel + \parallel Y \parallel$, l'homogénéité $\parallel (\lambda\, x,\, \lambda\, y) \parallel = |\lambda| \ \parallel (x,\,y) \parallel$ et le fait que si la norme est nulle, alors le vecteur est nul : $\parallel (x,\,y) \parallel = 0 \Longrightarrow x = y = 0$.

• Notion de distance euclidienne

La distance $\mathrm{d}\,((x,\,y),\,(x_0,\,y_0))$ entre les points $(x,\,y)$ et $(x_0,\,y_0)$ est la norme de la différence : $\mathrm{d}\,((x,\,y),\,(x_0,\,y_0)) = \parallel (x-x_0,\,y-y_0) \parallel\, = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

• Fonction qui tend vers zéro si le point tend vers l'origine

On dit qu'une fonction $\varphi(u,\,v)$ tend vers zéro si le point $(u,\,v)$ tend vers l'origine $(0,\,0)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\varphi(u,\,v)$ est de valeur absolue inférieure strictement à ε dès que la norme de $(u,\,v)$ est assez petite :

$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall (u,\,v) \in D,\, \parallel (u,\,v) \parallel < \eta \Longrightarrow |\varphi(u,\,v) < \varepsilon$.

La fonction h proposée en exemple ci-dessus tend vers zéro à l'origine.

• Notion de continuité

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,\,y) \longmapsto f(x,\,y) \in \mathbb{R}$ et un point $(a,\,b) \in D$. On dit que f est continue au point $(a,\,b)$ si et seulement si la fonction $\varphi(u,\,v)$ définie par $\varphi(u,\,v) = f(a+u,\,b+v) - f(a,\,b)$ tend vers zéro si le point $(u,\,v)$ tend vers l'origine. Ainsi, pour toute erreur $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite, on peut trouver un (petit) disque (non vide !) de rayon $\eta > 0$ de sorte que si le point $(x,\,y) \in D$ appartient au disque de centre $(a,\,b)$ et de rayon $\eta > 0$, c'est à dire si la distance entre $(x,\,y) \in D$ et $(a,\,b)$ est inférieure à η, alors l'erreur $|f(x,\,y) - f(a,\,b)|$ entre les valeurs prises par la fonction est inférieure (strictement) à ε :

$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall (x,\,y) \in D,\, d((x,\,y),\,(a,\,b)) < \eta \Longrightarrow |f(x,\,y) - f(a,\,b)| < \varepsilon$.

Toutes les fonctions proposées dans les exemples plus haut sont continues en $(0,\,0)$, sauf la fonction s qui ne l'est pas (exercice !).

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $(a,\,b) \in D$, on dit qu'elle est continue sur D.

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur D et si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $(g_\circ f)(x,\,y) \equiv g(f(x,\,y))$ est une fonction continue sur D.

• Notion de différentiabilité

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point $(a, b) \in D$. On dit que f est différentiable au point (a, b) si et seulement si il existe deux nombres α et β et une fonction φ de deux variables qui tend vers zéro à l'origine de sorte que l'on a le développement suivant pour $(x, y) = (a+u, b+v)$ et (u, v) tendant vers zéro :
$f(a+u, b+v) = f(a, b) + \alpha\, u + \beta\, v + \| (u, v) \| \; \varphi(u, v)$.
En d'autres termes, la fonction f est "proche" d'une fonction affine au voisinage du point (a, b).
Théorème. Si f est différentiable en $(a, b) \in D$, alors elle est continue en ce point.
Si f est différentiable au point (a, b), elle a aussi des dérivées partielles en ce point. De plus, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \alpha$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \beta$. Par contre, l'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la différentiabilité, comme le montre la fonction s au point $(0, 0)$: les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$ existent alors que la fonction s n'est pas continue à l'origine.
Si f est différentiable en tout point (a, b) de son ensemble de définition, on dit simplement que f est différentiable sur D.

• Dérivation des fonctions composées (i)

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie sur D et deux fonctions $\mathbb{R} \ni t \longmapsto X(t)$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto Y(t)$ de telle sorte que pour tout t, $(X(t), Y(t)) \in D$. Alors la fonction composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ est bien définie pour tout t.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, X'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, Y'(t)$.

• Dérivation des fonctions composées (ii)

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et deux autres fonctions de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto X(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto Y(u, v) \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout $(u, v) \in \Delta$, $(X(u, v), Y(u, v)) \in D$. Alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est bien définie sur Δ.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur Δ, alors la fonction composée g est une fonction de deux variables continue sur Δ.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont différentiables sur Δ, alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est différentible sur Δ et les dérivées partielles se calculent comme suit : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, \dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, \dfrac{\partial Y}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, \dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, \dfrac{\partial Y}{\partial v}$.
Afin d'alléger l'écriture, nous avons omis d'expliciter les arguments des différentes fonctions dans les deux relations précédentes. Sauriez-vous les rétablir ?