le cnam **Applications de l'Analyse à la Géométrie**

Cours 2 Extrema des fonctions de deux variables réelles

- Quelques exemples
  $\alpha(x, y) = ax + by + c$, fonction affine
  $f(x, y) = x^2 + y^2$
  $g(x, y) = x^2 - y^2$
  $h(x, y) = xy$
  $s(x, y) = xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
- Formule de Taylor à l'ordre un

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition D. On suppose f différentiable au point (a, b). Alors on a le développement suivant, encore appelé “formule de Taylor au premier ordre” :
$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, k \;+ \| (h, k) \| \; \varepsilon(h, k)$, où $\varepsilon(h, k)$, est une fonction qui tend vers zéro si le point (h, k) tend vers zéro.

- Dérivée d'une fonction composée (i)

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie sur D et deux fonctions $\mathbb{R} \ni t \longmapsto X(t)$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto Y(t)$ de telle sorte que pour tout t, $(X(t), Y(t)) \in D$. Alors la fonction composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ est bien définie pour tout t. De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.

En particulier, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + t\,h, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x + t\,h, y)\, h$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x, y + t\,k) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y + t\,k)\, k$.

- Dérivée d'une fonction composée (ii)

Si les fonctions X et Y sont fonctions non pas d'une seule, mais de deux variables u et v, la composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est différentiable si les fonctions f, X et Y le sont et on a : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial X}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial Y}{\partial v}$.

Exemple des coordonnées polaires : $g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonctin f.

- Intégration par parties à l'ordre deux.

Soit $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois continuement dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$. On a alors la relation $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \dfrac{1}{2}\varphi''(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^2 \varphi'''(t)\, \mathrm{d}t$.

François Dubois, 28 février 2017.

• Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction d'une variable réelle
Soit ψ une fonction assez régulière (au moins deux fois dérivable) d'une variable réelle. On a alors le développement de Taylor à l'ordre deux lorsque θ est "petit" :
$\psi(x+\theta) = \psi(x) + \psi'(x)\,\theta + \frac{1}{2}\,\psi''(x)\,\theta^2 + |\theta|^2\,\varepsilon(\theta)$, où ε est une fonction qui tend vers zéro si θ tend vers zéro.

• Extrema d'une fonction d'une variable réelle
On se donne $a \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f :]a-\eta, a+\eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a deux fois dériable en a. On suppose que f admet un minimum (local) au point a : $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$. Alors on a $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
Réciproquement, si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors la fonction f a un minimum local en a: on a l'inégalité $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$ si le nombre strictement positif η est choisi assez petit.

• Dérivées partielles secondes
On suppose la fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable en tout point $(x, y) \in D$. De plus, on supppose que les deux fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur l'ensemble de définition D de f. On se donne enfin un point $(a, b) \in D$ où les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables.

Théorème de Schwarz. Dans les conditions précédentes, les dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(a, b)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(a, b)$ sont égales : $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)(a, b) = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)(a, b)$. On la note indifféremment $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.
Attention aux hypothèses du résultat précédent : la fonction s proposée en exemple dans cette Note admet les dérivées partielles secondes croisées suivantes : $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial s}{\partial y}\Big)(0, 0) = -1$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial s}{\partial x}\Big)(0, 0) = 1$. Elles sont différentes [exercice !].

• Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction de deux variables réelles
On suppose (pour simplifier les hypothèses) que la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ a des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 qui sont toutes des fonctions continues sur l'ensemble de définition D. Alors, au voisinage de chaque point $(a, b) \in D$, il existe une fonction $\varepsilon(h, k)$ qui tend vers zéro si (h, k) tend vers zéro de sorte que $f(a+h, b+k) = f(a, b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,k + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\,h^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\,hk + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\,k^2\Big) + \|\,(h, k)\,\|^2\;\varepsilon(h, k)$.

• Un extremum définit un point critique
On suppose que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dispose de dérivées partielles continues au voisinage du point $(a, b) \in D$. Si la fonction f admet un minimum (local) ou un maximum (local) en au point (a, b), c'est à dire si $f(x, y) \geq f(a, b)$, $\forall (x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta <$

$y < b+\eta$ pour $\eta > 0$ assez petit pour un minimum et $f(x, y) \leq f(a, b)$ dans les mêmes conditions pour un maximum, alors le point (a, b) est un "point critique" de la fonction f : on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

• Minimum et maximum d'une fonction de deux variables réelles

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, si de plus f admet des dérivées partielles secondes au point (a, b), alors on a pour un minimum
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \geq 0$ et $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\Big)^2 \leq \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\Big)\,\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\Big)$.

Dans le cas d'un maximum, on a les inégalités suivantes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \leq 0$ et
$\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\Big)^2 \leq \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\Big)\,\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\Big)$.

Si la fonction f a un point critique sans qu'aucune des conditions sur les dérivées partielles du second ordre vues ci-dessus ne soient satisfaite, on dit que le point (a, b) est un "point col" pour la fonction f.

Pour les trois fonctions f, g et h proposées en exemple au début de cette Note, le point $(0, 0)$ est un point critique. C'est de plus un minimum pour f et un point col pour les fonctions g et h.

• Conditions suffisantes de minimum et maximum d'une fonction de deux variables réelles

Réciproquement, si l'on a d'une part $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ et d'autre part, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ et $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\Big)^2 < \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\Big)\,\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\Big)$, alors la fonction f admet un minimum local au point (a, b) : $f(x, y) \geq f(a, b)$, $\forall (x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$ pour $\eta > 0$ assez petit. On remarque que l'on a alors forcément $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$.

De même, si l'on a d'une part $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ et d'autre part, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ et $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\Big)^2 < \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\Big)\,\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\Big)$ [remarquer ici que c'est la meme inégalité que dans le cas d'un minumum !], alors la fonction f admet un maximum local au point (a, b) : $f(x, y) \leq f(a, b)$, $\forall (x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$ pour $\eta > 0$ assez petit. Dans ce cas du maximum, on a alors nécessairement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

• Point col

On suppose que la point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour la fonction f : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. On suppose que les dérivées partielles secondes de f en (a, b) ne sont pas toutes nulles. Si de plus, on a l'inégalité $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\Big)^2 > \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\Big)\,\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\Big)$, le point (a, b) n'est ni un maximum, ni un minimum, mais un "point col" : la fonction f n'est ni supérieure, ni inférieure au nombre $f(a, b)$ au voisinage de (a, b).

C'est le cas par exemple des fonctions g et h proposées en exemple au point $(0, 0)$.