le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 1 Droites dans le plan

• Plan affine

On suppose, au début de ce chapitre de rappels, que la notion de plan affine est acquise. Un repère de ce plan permet de parler de coordonnées. Nous reviendrons dans ce chapitre et la suite de ce cours sur la façon d'introduire cette notion de façon générale.

• Equation d'une droite

On se donne un triplet (α, β, γ) de nombres réels de sorte que α et β ne soient pas simultanément nuls : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Une droite D dans le plan a toujours une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$: un point M du plan de coordonnées (x, y) appartient à la droite D si et seulement si ses coordonnées satisfont à l'équation précédente.

La condition $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ est naturelle. Si $\alpha = \beta = 0$, l'équation résiduelle $\gamma = 0$ ne dit rien sur un éventuel point de coordonnées (x, y).

Si $\beta \neq 0$, l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ peut s'écrire également $y = a x + b$, avec $a = -\frac{\alpha}{\beta}$ et $b = -\frac{\gamma}{\beta}$. Le nombre b est l'ordonnée à l'origine et a la pente de la droite. Notons que l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.

Si $\beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$ et l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ prend maintenant la forme $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$. La droite D est une parallèle à l'axe des ordonnées, qui a pour équation $x = 0$.

• Vecteur directeur

On se donne deux nombres réels X et Y solutions de l'équation homogene $\alpha X + \beta Y = 0$ et non tous deux nuls : $(X, Y) \neq (0, 0)$. Par exemple, $X = -\beta$ et $Y = \alpha$. Le vecteur u de coordonnées (X, Y) est alors par définition un vecteur directeur de la droite D.

Si la droite D a une équation qui peut s'écrire $y = a x + b$, alors un vecteur directeur a pour coordonnées $(1, a)$. Dans le cas où l'équation de la droite est de la forme $x =$ constante, un vecteur directeur a pour coordonnées $(0, 1)$.

Un vecteur directeur est défini à une constante non nulle près. Si $u$de coordonnées (X, Y) est un vecteur directeur de la droite D, alors pour tout nombre $\theta \neq 0$, le vecteur $v = \theta u$ de coordonnées $(\theta X, \theta Y)$ est encore un vecteur directeur de D.

• Point et vecteur directeur

On se donne un point A de la droite D de coordonnées (x_0, y_0). Alors pour tout point $M \in D$ différent du point A, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ de coordonnées $(x - x_0, y - y_0)$ est un vecteur directeur de D.

François Dubois, février 2020.

- Représentation paramétrique

Si on se donne un point A de la droite D et un vecteur directeur u, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ de la forme $M(t) = A + t\,u$ est un point de la droite. La relation $M(t) = A + t\,u$ s'écrit aussi de façon très classique $\overrightarrow{AM} = t\,u$. Si on explicite les coordonnées $(x(t), y(t))$ de $M(t)$, on a $x(t) = x_0 + t\,X$ et $y(t) = y_0 + t\,Y$.
Réciproquement, si on se donne un point $A(x_0, y_0)$ de la droite D (on a donc la solution particulière $\alpha\,x_0 + \beta\,y_0 + \gamma = 0$) et un vecteur directeur $u(X, Y)$ (on a $\alpha\,X + \beta\,Y = 0$ et $(X, Y) \neq (0, 0)$), alors pour tout point $M(x, y)$ de la droite D, il existe $t \in \mathbb{R}$ de sorte que l'on puisse écrire ce point comme somme du point $A(x_0, y_0)$ et du vecteur tu: $M(t) = A + tu$.
La relation $M(t) = A + tu$ est la représentation paramétrique de la droite D. Cette relation peut se décliner sur les deux composantes : $x = x_0 + t\,X$ et $y = y_0 + t\,Y$.

- Droite passant par deux points distincts

On se donne deux points $A(x_0, y_0)$ et $B(x'_0, y'_0)$ qu'on suppose distincts, c'est à dire $(x_0, y_0) \neq (x'_0, y'_0)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0)$ est un vecteur non nul, donc un vecteur directeur de la droite AB. On en déduit une représentation paramétrique de cette droite : $x = x_0 + t\,(x'_0 - x_0)$, $y = y_0 + t\,(y'_0 - y_0)$. On vérifie que les deux points $A(x_0, y_0)$ et $B(x'_0, y'_0)$ satisfont effectivement les relations précédentes.
Une équation de la droite AB s'obtient en éliminant la variable t entre les relations $x = x_0 + t\,(x'_0 - x_0)$ et $y = y_0 + t\,(y'_0 - y_0)$. On multiplie la première équation par $(y'_0 - y_0)$ et la seconde par $-(x'_0 - x_0)$ et on additionnne. On obtient un polynôme de degré 1 par rapport à la variable t et le terme de degré 1 est nul. Il reste une relation entre les variables x et y qui s'écrit $(y'_0 - y_0)\,(x - x_0) - (x'_0 - x_0)\,(y - y_0) = 0$: c'est une équation de la droite AB.
Un cas particulier. On se donne deux nombres réels a et b de sorte que $a\,b \neq 0$. Alors une équation de la droite AB qui passe par les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ peut s'écrire $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- Une droite a-t-elle une seule équation ?

La réponse est non. On peut toujours multiplier l'équation d'une droite par un nombre non nul arbitraire : si on se donne un triplet (α, β, γ) de sorte que α et β ne soient pas simultanément nuls, c'est à dire $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et la droite D d'équation $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$, alors pour tout nombre $\theta \neq 0$, la relation $(\theta\,\alpha)\,x + (\theta\,\beta)\,y + (\theta\,\gamma) = 0$ définit encore les points de D.

- Intersection de deux droites

Nous montrons que l'intersection $D \cap D'$ de deux droites D et D' peut être vide et alors les droites D et D' sont parallèles et ont même vecteur directeur, peut être formée d'un unique point I du plan et alors ont dit que les droites D et D' sont concourantes, ou bien les deux droites D et D' sont confondues et $D = D'$.
On se donne six nombres α, β, γ, α', β' et γ' de sorte que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$. On suppose que les droites D et D' ont respectivement pour équation $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$ et $\alpha'\,x + \beta'\,y + \gamma' = 0$. Chercher les points $M(x, y)$ de l'intersection $D \cap D'$ revient à résoudre le système de deux équations à deux inconnues défini par les relations précédentes.

On multiplie la première équation par β' et la seconde par $-\beta$, ce qui permet d'éliminer l'inconnue y. Il reste une équation du premier degré par rapport à l'inconnue x:
$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)x + (\gamma\beta' - \gamma'\beta) = 0$.
Dans le premier cas de figure, le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ défini par $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ est non nul et l'équation précédente a une unique solution $x = \frac{\gamma'\beta - \gamma\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. On termine la résolution du système de deux équations $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ en multipliant la première équation par $-\alpha'$ et la seconde par α pour éliminer la variable x. Il vient
$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)y + (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) = 0$ et on en déduit la seconde coordonnée de l'unique point d'intersection I de $D \cap D'$: $y = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.
Dans le second cas de figure, le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ est nul : $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$.
Les deux équations déduites précédemment s'écrivent maintenant $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$ et
$\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ puisque les coefficients des inconnues x et y sont nuls. Les deux vecteurs directeurs des droites D et D' sont proportionnels. En effet, si $\beta \neq 0$, on a
$(-\beta', \alpha') = \frac{\beta'}{\beta}(-\beta, \alpha)$. Par ailleurs, si $\beta = 0$, alors $\alpha \neq 0$ donc β' est nul lui aussi et en conséquence, $\alpha' \neq 0$. Les vecteurs directeurs de D et D' sont dans ce cas tous deux proportionnels au vecteur $(0, 1)$.
Si ces deux conditions sur les coefficients sont satisfaites, c'est à dire si $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$ et $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, alors les deux équations des droites D et D' sont proportionnelles [la preuve est un exercice laissé au lecteur]. On a alors $D = D'$ et les deux droites sont confondues. Dans le cas où l'une des conditions $\gamma\beta' - \gamma'\beta \neq 0$ ou $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ a lieu, le systeme initial n'a pas de solution et $D \cap D' = \emptyset$. Les droites D et D' sont parallèles ; elles ont même vecteur directeur mais n'ont pas de point d'intersection.

- Repère affine du plan

On se donne un "point-origine" O du plan, un vecteur non nul $i \neq 0$ et un second vecteur non nul $j \neq 0$ non colinéaire au premier : que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $j \neq \lambda i$. Les droites contenant l'origine et dirigées par i d'une part, par j d'autre part, ne sont pas parallèles.
On dit que (i, j) est une base de $\mathbb{R}^2$ et $(\mathrm{O}; i, j)$ un repère affine du plan. Alors pour tout point M, il existe un et un seul couple de nombres réels (x, y) de sorte que $M = \mathrm{O} + x i + y j$.

- Relation de Chasles

Pour tout triplet (A, B, C) de points du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Exercices

- Fondamentaux géométriques

On se donne dans un repere les quatre points suivants : $A(-6, -1)$, $B(3, 1)$, $C(15, 4)$ et $D(\frac{15}{2}, 2)$.

a) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b) Les points A, B et D sont-ils alignés ?

• Fondamentaux géométriques

On se donne dans un repere les trois points suivants : $A\,(-2,\,3)$, $B\,(3,\,-1)$ et $C\,(4,\,4)$.

a) Calculer les coordonnées du point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Même question pour le point L tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

c) Puis pour le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

d) Montrer que les points K, L et M sont alignés.

e) Montrer que cette propriété reste vraie si $(A,\,B,\,C)$ est un triangle quelconque du plan.

• Fondamentaux géométriques (d'après Anaud Bodin)

Donner un vecteur directeur, une représentation paramétrique, une équation cartésienne et la pente des droites qui passent par les points A et B suivants :

a) $A\,(2,\,3)$ et $B\,(-1,\,4)$,

b) $A\,(7,\,-2)$ et $B\,(-2,\,-5)$.

• Fondamentaux géométriques (d'après Anaud Bodin)

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ dans les cas suivants :

a) $A\,(2,\,1)$ et $\overrightarrow{u}\,(-3,\,-1)$,

b) $A\,(0,\,1)$ et $\overrightarrow{u}\,(1,\,2)$.

• Une figure classique

On se donne dans le plan l'ensemble K des points de coordonnées $(x\,y)$ de sorte que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 1$.

a) Quelle est la nature géométrique de l'ensemble K ?

b) Dessiner cet ensemble.