

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 2 Matrices

- Définition des matrices

On se donne deux nombres entiers n et m supérieurs ou égaux à 1. Une matrice A à n lignes et m colonnes est un tableau de nm nombres a_{ij} . L'entier i est l'indice de ligne ($1 \leq i \leq n$)

et j est l'indice de colonne ($1 \leq j \leq m$). On note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ ou plus

simplement $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Le nombre a_{ij} est appelé "élément de matrice (i, j) de la matrice A ".

Pour $n = m = 1$, une matrice est un simple nombre. Pour $n = 2$ et $m = 1$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une matrice colonne ; on parle aussi un "vecteur colonne" si $m = 1$. Si $n = 1$ et $m = 2$, on a par exemple $A = (\alpha \quad \beta)$ et la matrice A est dans ce cas un "vecteur ligne". Si $n = m = 2$, la matrice A est une matrice carrée d'ordre deux : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Nous notons \mathcal{M}_{nm} l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les nombres qui composent ses éléments. S'il faut préciser où vivent les éléments de matrice, on introduit la notation $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ dans le cas des nombres réels ou $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ pour les nombres complexes. Pour les matrices carrées, on simplifie la notation et $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_{nn}$.

Dans \mathcal{M}_{nm} , la matrice nulle, notée simplement 0 , est composée uniquement de zéros : $0_{ij} = 0$ pour toute ligne i et toute colonne j .

- Égalité de deux matrices

On dit que les matrices A et B sont égales lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) le nombre n de lignes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B
- (ii) le nombre m de colonnes de la matrice A est égal au nombre de colonnes de la matrice B
- (iii) pour tout i et j tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, les éléments de matrice a_{ij} et b_{ij} sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour toute ligne i et toute colonne j .

On retiendra surtout qu'on ne peut pas comparer deux matrices qui n'ont pas les mêmes dimensions.

- Somme de deux matrices

On peut ajouter deux matrices qui ont toutes deux le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$ et $B \in \mathcal{M}_{nm}$, alors $A + B \in \mathcal{M}_{nm}$ et l'élément de matrice (i, j) de la matrice $A + B$ vaut $a_{ij} + b_{ij}$.

L'addition des matrices est commutative : on a $A + B = B + A$ dès que la somme peut être effectuée.

- Multiplication d'un scalaire par une matrice

Si λ est un nombre et $A \in \mathcal{M}_{nm}$ une matrice à n lignes et m colonnes, alors λA est une matrice à n lignes et m colonnes et son élément de matrice (i, j) est égal à λa_{ij} pour toutes les valeurs de i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

On a toujours $(\lambda + \mu)A = (\lambda A) + (\mu A)$, $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$ et $\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B)$.

En pratique, on utilise cette opération de multiplication par un scalaire pour factoriser un nombre. Par exemple pour une matrice carrée d'ordre deux, on a $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- Transposition

Si $A \in \mathcal{M}_{nm}$, sa transposée A^t appartient à \mathcal{M}_{mn} : on l'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A . Si l'élément de matrice (i, j) de A est égal à a_{ij} , l'élément (j, i) de A^t vaut également a_{ij} .

On remarque que la transposée de la matrice transposée est identique à la matrice initiale : $(A^t)^t = A$.

- Produit de deux matrices

On se donne deux matrices $A \in \mathcal{M}_{nm}$ et $B \in \mathcal{M}_{mp}$: le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B . Dans ce cas, et dans ce cas uniquement, on peut effectuer le produit AB de la matrice A par la matrice B . L'élément de matrice (i, k) de la matrice AB est égal à $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{im} b_{mk}$. En général, même si le produit AB existe, le produit BA n'existe pas.

On considère l'exemple très courant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors $AX = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

On remarque que le produit XA n'est pas défini car le nombre [1] de colonnes de X n'est pas égal au nombre [2] de lignes de A .

Même si les deux produits AB et BA peuvent être calculés, ils définissent en général des matrices d'ordres différents. On pose par exemple $A = (\alpha \ \beta)$ (matrice d'une seule ligne et deux colonnes) et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (matrice de deux lignes et une colonne). Alors $AB = (\alpha a + \beta b)$ est

une matrice à une seule ligne et une seule colonne. Par ailleurs $BA = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta \\ b\alpha & b\beta \end{pmatrix}$ est cette fois une matrice à deux lignes et deux colonnes.

Dès que les opérations écrites ci-dessous ont un sens, on a (A, B et C sont des matrices, λ et μ des nombres) : $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

- Associativité du produit des matrices

On se donne trois matrices $A \in \mathcal{M}_{nm}$, $B \in \mathcal{M}_{mp}$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}$. Quand on effectue le produit AB , on trouve une matrice à n lignes et p colonnes. On peut donc multiplier cette matrice AB à droite par la matrice C et le produit de matrices $(AB)C$ est bien défini dans \mathcal{M}_{nq} . De façon analogue, on peut effectuer le produit BC des matrices B et C : c'est une matrice à m lignes et q colonnes. On peut donc la multiplier à gauche par la matrice A : la matrice $A(BC)$ est bien définie et elle appartient encore à \mathcal{M}_{nq} . L'associativité du produit des matrices exprime que $(AB)C = A(BC)$: on place les parenthèses comme on veut quand on doit faire le produit de trois matrices ou plus.

- Transposition et produit

Si le produit AB des deux matrices A et B est bien défini, alors le produit $B^t A^t$ des transposées est lui aussi bien défini et on a $(AB)^t = B^t A^t$.

- Produit de matrices carrées

Rappelons qu'une matrice carrée a le même nombre de lignes et de colonnes, appelé aussi ordre de la matrice. Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, le produit AB est toujours défini et c'est une matrice carrée d'ordre n . On remarque qu'il en est de même du produit BA . La matrice identité I a tous ses éléments nuls, sauf ses éléments diagonaux ($j = i$) pour lesquels $I_{ij} = 1$. Si on introduit le symbole de Kronecker δ_{ij} tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, on a $I_{ij} = \delta_{ij}$. Tout comme le nombre 1 pour la multiplication des nombres usuels, la matrice identité est un élément neutre pour la multiplication des matrices : $AI = IA = A$ pour toute matrice carrée A .

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n , on peut toujours calculer les produits AB et BA . Il sont en général différents. L'ordre dans lequel on effectue le produit de deux matrices est toujours important ; le produit des matrices carrées n'est pas commutatif.

On a par exemple, avec $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Diviseurs de zéro

Dans l'ensemble \mathcal{M}_n (qui a une structure d'anneau pour l'addition des matrices et leur multiplication), il existe des "diviseurs de zéro". On peut trouver des matrices A et B toutes deux non nulles telles que leur produit est nul. Le produit de deux matrices carrées peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul : on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = 0$, matrice nulle. On a aussi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

- Inverse d'une matrice carrée

On se donne une matrice carrée A d'ordre n . Si on peut trouver une matrice B telle que $AB = BA = I$, la matrice A est inversible. On pose $B = A^{-1}$.

Si la matrice carrée A est inversible, la matrice inverse A^{-1} est unique.

On a par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice carrée deux par deux générale $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si le

déterminant de A , $\det A \equiv ad - bc$ est non nul. Dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour déterminer la matrice inverse de A , on résout le système linéaire général $AX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'expression de x en fonction de α et β détermine la première ligne de A^{-1} ; l'expression de y en fonction de α et β détermine la seconde ligne de la matrice inverse [exercice : vérifier ces propriétés].

Si $ad - bc = 0$, les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sont deux diviseurs de zéro : $A\tilde{A} = 0$. On a aussi $\tilde{A}A = 0$.

Exercices

- Commutateur

On considère la matrice à deux lignes et deux colonnes suivante $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que l'inverse de la matrice J est égale à la matrice J elle-même.
- Déterminer l'ensemble de toutes les matrices X à deux lignes et deux colonnes qui commutent avec la matrice J : $XJ = JX$.

- Puissance entières d'une matrice

On se donne un nombre a et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose par convention $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = AA^2$, etc.

- Pour $a = 1$ et n entier naturel, proposer une expression algébrique pour la matrice A^n .
- Démontrer par récurrence que l'expression proposée à la question a) donne effectivement la puissance n^e de la matrice A .
- Reprendre les questions a) et b) avec un nombre a arbitraire.

- Associativité du produit des matrices

On note \mathcal{M}_n l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes. On se donne trois matrices A , B et C dans \mathcal{M}_n .

- Calculer l'élément $(AB)_{ik}$ de la i^e ligne et la k^e colonne de la matrice AB .
- En déduire l'élément $((AB)C)_{iq}$ de la i^e ligne et la q^e colonne de la matrice $(AB)C$.
- Calculer l'élément $(BC)_{jq}$ de la j^e ligne et la q^e colonne de la matrice BC .
- En déduire l'élément $(A(BC))_{iq}$ de la i^e ligne et la q^e colonne de la matrice $A(BC)$.
- Déduire des questions b) et d) la propriété d'associativité du produit des matrices carrées : $(AB)C = A(BC)$.

- Changement de base

On se donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que l'inverse P^{-1} de la matrice P peut s'écrire $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.
- Calculer les produits $P^{-1}A$ et AP .
- En déduire, en effectuant le calcul de deux façons, que l'on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Inverse d'un produit

On se donne deux matrices A et B à n lignes et n colonnes. On les suppose inversibles.

- Rappeler les propriétés satisfaites par les inverses A^{-1} et B^{-1} .
- Démontrer que pour calculer l'inverse de la matrice produit AB , on doit faire le produit des inverses en échangeant les facteurs : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Que vaut $(BA)^{-1}$?

- Opérations matricielles (d'après Françoise Santi)

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Parmi les opérations suivantes, indiquer celles qui sont possibles et celles qui sont impossibles : $A+B$, $A+C$, $B+C$, AC , CA , BC , A^2 , B^2 , A^{-1} et B^{-1} .
- Effectuer les opérations possibles, en considérant les matrices à coefficients dans \mathbb{R} .

- Transposition (d'après Françoise Santi)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qui sont possibles : AB , $A(A^t)$, Aa , aA , $A(a^t)$, $(b^t)A$, Ba et Bb .
- Des résultats de la question précédente, déduire (sans calcul) les valeurs de $a(A^t)$, $(Bb)^t$ et $(b^t)B$.
- Déterminer $a(A^t)Bb$ et $(b^t)A(A^t)b$.