

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 4 Changement de base

- Rappel : expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

On se donne un espace E de dimension n , un espace F de dimension p et une application linéaire u de E dans F . On se donne aussi une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et une base (f_1, f_2, \dots, f_p) de l'espace F . Pour $j = 1, \dots, n$, le vecteur $u(e_j)$ image d'un vecteur de la base de E se décompose de façon unique dans la base (f_1, f_2, \dots, f_p) : il existe des coefficients uniques $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}$ de sorte que $u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \cdot f_i$. La matrice M_u relativement aux bases (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et (f_1, f_2, \dots, f_p) de F s'écrit $(M_u)_{ij} = a_{ij}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$.

Si on se donne un vecteur $x \in E$, on le décompose dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) :

$x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j$. On regroupe les composantes x_1, x_2, \dots, x_n du vecteur x sous la forme

d'un vecteur X composé d'une colonne et n lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. De même, les coordon-

nées y_1, y_2, \dots, y_p du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^p y_i \cdot f_i$ dans la base (f_1, f_2, \dots, f_p) de F sont

représentées avec un vecteur Y à une colonne et p lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

Alors les coordonnées $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice M_u par le vecteur X : $Y = M_u \cdot X$. Les coordonnées du vecteur image s'obtiennent en multipliant la matrice de l'opérateur par les coordonnées du vecteur de l'espace de départ.

- Composition des applications linéaires et produit de matrices

On dispose de trois espaces vectoriels D , E et F de dimensions respectives q , n et p et deux applications linéaires $v : D \rightarrow E$ de D dans E et $u : E \rightarrow F$ de E dans F . On a alors le diagramme suivant $D \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$ qui permet de définir l'application composée $u \circ v$: $(u \circ v)(\xi) = u(v(\xi))$ pour tout vecteur $\xi \in D$. L'application composée $u \circ v$ est elle aussi linéaire. On se donne une base (d_1, d_2, \dots, d_q) de l'espace D en plus des bases (e_1, e_2, \dots, e_n) et (f_1, f_2, \dots, f_p) des espaces E et F . On suppose que $v(d_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk} e_j$. Alors dans les bases (d_k) et (e_j) , l'application v est représentée par une matrice M_v à n lignes et q colonnes qui s'écrit $M_v = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq q}$. On a alors $(u \circ v)(d_k) = \sum_{i=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) f_i$ ce qui signifie que

relativement aux bases (d_k) et (f_i) , l'application composée $u \circ v$ est représentée par une matrice $M_{u \circ v} = (c_{ik})$ à p lignes et q colonnes avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq k \leq q$. La matrice $M_{u \circ v}$ est égale au produit des matrices M_u et M_v : $M_{u \circ v} = M_u M_v$.

- Conditions de bijectivité d'un endomorphisme

Un endomorphisme de l'espace vectoriel E est une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ de l'espace E dans lui-même. On rappelle que le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E, u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E . L'application u est injective (c'est à dire pour tout $b \in E$, l'équation $u(x) = b$ a au plus une solution) si et seulement si $\ker u = \{0\}$.

L'image $\text{Im } u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de l'espace d'arrivée (ici égal à E lui-même), qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: on a donc

$\text{Im } u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in E, \exists x \in E, y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E . L'application u est surjective (c'est à dire pour tout $b \in E$, l'équation $u(x) = b$ a au moins une solution) si et seulement si $\text{Im } u = E$.

On a les équivalences suivantes : l'endomorphisme (u est bijectif) si et seulement si (u est injectif) si et seulement si ($\ker u = \{0\}$) si et seulement si (u est surjectif) si et seulement si ($\text{Im } u = E$) et enfin si et seulement si (u transforme toute base de E en une base de E).

- Endomorphisme bijectif et matrice inversible

On se donne un espace vectoriel E de dimension finie n et une base $(e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_n)$ de E . On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M_u relativement à la base $(e_1, e_2, \dots, e_j, \dots, e_n)$. Alors u est bijectif si et seulement si la matrice M_u est inversible.

- Un premier exemple

On se donne un espace E de dimension 3, une base (e_1, e_2, e_3) de E et une application linéaire

$u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice associée $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_1 + e_2$ et

$u(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$. On peut alors vérifier que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une nouvelle base de l'espace E . L'application u est bijective et la matrice associée A_1 est inversible.

- Un second exemple

Toutes choses égales par ailleurs, on considère l'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ de matrice associée

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On peut calculer le noyau de v : il est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On

a $\ker v = \{ \theta \cdot (5, -2, 1)^t, \theta \in \mathbb{R} \}$, relation que l'on peut aussi écrire $\ker v = \langle (5, -2, 1)^t \rangle$.

Le noyau de l'endomorphisme n'est pas réduit au vecteur nul ; donc l'opérateur v n'est pas injectif et il n'est pas bijectif non plus. En ce qui concerne l'image $\text{Im } v$, elle est engendrée par les vecteurs e_1 , $2e_1 + e_2 + 2e_3$ et $-e_1 + 2e_2 + 4e_3$. Un calcul algébrique montre qu'on a

$\text{Im } v = \langle e_1, e_2 + 2e_3 \rangle$ qui est une famille libre mais composée de deux vecteurs seulement.

L'endomorphisme v ne transforme pas toute base de E en une autre base de E ; la dimension de $\text{Im } v$ est égale à deux ; l'application v n'est pas surjective.

- Résolution d'un système linéaire

On se donne une matrice A carrée ; elle a le même nombre n de lignes et de colonnes. On peut la voir comme la matrice d'un opérateur u d'un espace E de dimension n dans lui-même une fois que l'on s'est donné une base (e_1, \dots, e_n) de E . On peut aussi spécifier l'espace E et choisir $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On pose alors $\ker A = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = 0\}$ et $\text{Im}A = \{AX, X \in \mathbb{R}^n\}$. On se donne un second membre $B \in \mathbb{R}^n$ (un vecteur colonne formé de n nombres) et on cherche $X \in \mathbb{R}^n$ solution du système linéaire

$$(1) AX = B.$$

Le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est bijectif. On peut exprimer aussi cette condition sous une forme plus algébrique : le système (1) a une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible. Grâce aux conditions de bijectivité d'un endomorphisme, la condition précédente équivaut à : le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est injectif c'est à dire $\ker u = \{0\}$. D'un point de vue plus algébrique, le système (1) a une solution unique si et seulement si $AX = 0$ implique $X = 0$; la seule solution de l'équation homogene $AX = 0$ est la solution triviale $X = 0$ et on a $\ker A = \{0\}$.

D'autre part, le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est surjectif : $\text{Im}u = E$. Pour tout second membre $B \in \mathbb{R}^n$, l'équation (1) a toujours au moins une solution. Dans ce cas, on a $\text{Im}A = \mathbb{R}^n$.

- Rang d'une matrice carrée

On se donne un entier $n \geq 1$ et une matrice carrée A . Le rang de A est la dimension de son image : $\text{rg}A = \dim(\text{Im}A)$. Un opérateur linéaire de matrice carrée A est surjectif si et seulement si $\text{rg}A$ est maximal.

- Critère pratique pour garantir qu'un système linéaire carré a une solution unique

L'équation (1) a une solution unique si et seulement si l'équation homogene $AX = 0$, obtenue en remplaçant B par zéro dans le membre de droite de (1), a pour seule solution $X = 0$.

- Exemple de système linéaire "mal posé"

Un système linéaire (1) est mal posé s'il n'a pas une solution unique quel que soit le second membre $B \in \mathbb{R}^n$. Avec la matrice A_2 introduite plus haut dans cette leçon, le système

$$A_2 X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ n'a pas de solution. Le vecteur } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ n'appartient pas à l'image de } A_2.$$

Par contre, toutes choses égales par ailleurs, le système $BX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de solutions.

- Changement des coordonnées d'un vecteur lors d'un changement de base

On se donne un espace vectoriel E de dimension n et une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E . Tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Les nombres x_j

sont les coordonnées du vecteur x dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) . On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le

vecteur colonne (matrice à n lignes et une colonne) des coordonnées de x . Comment ce vecteur se transforme-t-il quand on change de base ?

On se donne une autre base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ de E . On exprime les nouveaux vecteurs de base par leurs coordonnées dans la base initiale : $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n P_{ji} e_j$. La matrice de passage P ainsi introduite contient dans sa i -ème colonne les coordonnées du vecteur \tilde{e}_i . La matrice de passage est inversible : si on échange les rôles des deux bases, on voit rapidement que $e_j = \sum_{\ell=1}^n (P^{-1})_{\ell j} \tilde{e}_\ell$. Les coordonnées $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ du vecteur x dans la nouvelle base (on a donc $x = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{e}_i$)

peuvent s'écrire avec un vecteur colonne $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a la relation $X = P \tilde{X}$.

Attention ! Les coordonnées dans la base initiale s'écrivent facilement à l'aide la matrice de passage. La relation $X = P \tilde{X}$ est équivalente à $\tilde{X} = P^{-1} X$. Pour calculer les coordonnées \tilde{X} du vecteur x dans la nouvelle base à partir de ses coordonnées X dans la base initiale, il faut résoudre le système linéaire $P \tilde{X} = X$ de matrice égale à la matrice de passage P .

- Un exemple de changement de base

On suppose $n = 3$ et la matrice de passage P donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note

$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ les coordonnées dans l'ancienne base et $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ celles dans la nouvelle base.

On a donc $P \tilde{X} = X$. On résout ce système linéaire et il vient $\tilde{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} X$. On a

donc complètement explicité la matrice inverse : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

On vérifie que le résultat est correct :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Méthode des multiplicateurs (ou méthode de Gauss) pour la résolution d'un système linéaire

On reprend l'exemple vu juste au dessus :
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = \alpha & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ -x + 4y + z = \beta & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ x - y + 0z = \gamma & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{cases}$$

On multiplie les équations par les familles de multiplicateurs écrits dans les colonnes de droite,

ce qui permet d'éliminer l'inconnue x . On en déduit alors un système de deux équations à deux

$$\text{inconnues } \begin{cases} 6y+4z = \alpha + \beta & \left| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -1 \\ 4 \end{array} \\ 3y+z = \beta + \gamma \end{cases}.$$

On résout ce système de deux équations à deux inconnues avec les jeux de multiplicateurs indiqués dans les colonne à droite, de façon à éliminer l'inconnue y puis l'inconnue z . On en déduit alors : $2z = \alpha - \beta - 2\gamma$ et $6y = -\alpha + 3\beta + 4\gamma$. On reporte ces valeurs dans la troisième équation du système initial : $x = y + \gamma = \frac{1}{6}(-\alpha + 3\beta + 10\gamma)$. Il vient alors

$$\tilde{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et le résultat utilisé dans le paragraphe précédent est établi.}$$

- Nouvelle matrice dans la nouvelle base

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on se donne une application linéaire u de E dans E . On suppose que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) est égale à A . L'image $y = u(x)$ a des coordonnées Y qui satisfont à la relation $Y = AX$. On note \tilde{A} la matrice du même opérateur u dans la nouvelle base $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ de E . Alors on a la relation $\tilde{A} = P^{-1}AP$.

La preuve de ce résultat est à la fois simple et délicate. On écrit $y = u(x)$ dans l'ancienne base : $Y = AX$. Puis on utilise la relation de changement de base pour le vecteur x : $X = P\tilde{X}$ et pour le vecteur image y : $Y = P\tilde{Y}$. On en déduit : $P\tilde{Y} = AP\tilde{X}$, c'est à dire $\tilde{Y} = P^{-1}AP\tilde{X}$. Si on exprime maintenant la relation $y = u(x)$ dans la nouvelle base, on a $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$. On rapproche cette relation de la relation précédente et on a l'égalité $\tilde{A}\tilde{X} = P^{-1}AP\tilde{X}$, pour tout vecteur colonne $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n$. On en déduit l'identité $\tilde{A} = P^{-1}AP$.

- Système linéaire carré de rang strictement inférieur à sa dimension

On se donne un système linéaire d'ordre n de la forme (1), où la matrice A n'est plus de rang n : $\text{rg}A < n$. La matrice A n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit au seul vecteur nul. Toute application linéaire représentée par la matrice A n'est pas surjective : l'image $\text{Im}A$ de A est incluse dans \mathbb{R}^n mais on a $\text{Im}A \neq \mathbb{R}^n$. Alors de deux choses l'une

(i) $B \in \text{Im}A$. Le système (1) a une infinité de solutions. Si X_0 désigne une solution particulière du système (1) ($AX_0 = B$) et ξ une solution de l'équation homogène ($A\xi = 0$), alors toute solution X du système (1) est de la forme $X = X_0 + \xi$.

(ii) $B \notin \text{Im}A$. Le système (1) n'a pas de solution.

Exercices

- Bases de \mathbb{R}^3

a) A quelle condition sur les nombres réels a et b la famille de vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ est-elle une base de } \mathbb{R}^3?$$

b) Même question avec les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Un système linéaire

a) Résoudre le système linéaire suivant
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Préciser le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Un autre système linéaire

Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

- Factorisation de Gauss pour un système linéaire deux par deux

On se donne la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne B arbitraire dans \mathbb{R}^2 : $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre le système linéaire (1) $AX = B$.

a) Montrer qu'on peut trouver deux matrices $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $U \equiv \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}$ de sorte que $LU = A$. On déterminera les quatre nombres a, p, q et r .

b) En introduisant un vecteur auxiliaire Y , montrer que la résolution de l'équation (1) se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires : d'abord $LY = B$ puis ensuite $UX = Y$.

c) Achever la résolution du système linéaire (1).

d) Expliciter l'inverse A^{-1} de la matrice A .