le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 11 — Dérivée seconde et conditions d'extremum

• Dérivation des fonctions composées : un premier cas.

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie sur D et deux fonctions $\mathbb{R} \ni t \longmapsto X(t)$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto Y(t)$ de telle sorte que pour tout t, $(X(t), Y(t)) \in D$. Alors la fonction composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ est bien définie pour tout t.

Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.

• Exemple de dérivation de fonctions composées

La relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(X(t), Y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$ se découvre par le calcul algébrique si on choisit par exemple une fonction f polynômiale de degré deux :
$f(x, y) = p\, x + q\, y + r + \frac{1}{2}\gamma\, x^2 + \delta\, x\, y + \frac{1}{2}\varepsilon\, y^2$. On sait que de façon générale,
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma\, a + \delta\, b$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta\, a + \varepsilon\, b$. Donc en particulier,
$\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t), Y(t)\big) = p + \gamma\, X(t) + \delta\, Y(t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t), Y(t)\big) = q + \delta\, X(t) + \varepsilon\, Y(t)$.
La fonction composée $g(t)$ a donc pour expression :
$g(t) = p\, X(t) + q\, Y(t) + r + \frac{1}{2}\gamma\, X(t)^2 + \delta\, X(t)\, Y(t) + \frac{1}{2}\varepsilon\, Y(t)^2$. On la dérive avec les règles usuelles qui permettent de prendre en compte les fonctions composées à une variable :
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = p\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + q\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \gamma\, X(t)\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \delta\, \big(X(t)\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\, Y(t)\big) + \varepsilon\, Y(t)\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On factorise $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$:
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \Big(p + \gamma\, X(t) + \delta\, Y(t)\Big)\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \Big(q + \delta\, X(t) + \varepsilon\, Y(t)\Big)\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On peut donc, compte tenu du calcul fait plus haut, réecrire cette expression sous la forme $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. Et l'expression que nous venons d'obtenir est en fait très générale.

• Dérivation des fonctions composées : un second cas

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et deux autres fonctions de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto X(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto Y(u, v) \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout $(u, v) \in \Delta$, $(X(u, v), Y(u, v)) \in D$. Alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est bien définie sur Δ.

Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur Δ, alors la fonction composée g est une fonction de deux variables continue sur Δ.

De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont différentiables sur Δ, alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est différentible sur Δ et les dérivées partielles se calculent comme suit : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\, \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \frac{\partial Y}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\, \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \frac{\partial Y}{\partial v}$.

François Dubois, avril 2020.

Exemple des coordonnées polaires $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On peut calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f. C'est un exercice laissé au lecteur.

- Matrice jacobienne

On regroupe les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au sein d'une matrice $J_f(x, y)$, la matrice jacobienne de f au point (x, y): $J_f(x, y) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\big)$. C'est une matrice à une ligne et deux colonnes pour cette fonction scalaire f de deux variables. On fait de même pour la fonction composée g : $J_g(u, v) = \big(\frac{\partial g}{\partial u}\ \frac{\partial g}{\partial v}\big)$ et pour la fonction de deux variables "XY" qui regroupe les deux fonctions $X(u, v)$ et $Y(u, v)$: la matrice J_{XY} est dans ce cas une matrice à deux lignes et deux colonnes : $J_{XY}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}$. Les relations $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial v}$ s'expriment sous la forme suivante : $J_g(u, v) = J_f(x, y) \cdot J_{XY}(u, v)$. La matrice jacobienne de la composée est égale au produit des matrices jacobiennes de chacune des deux fonctions.

- Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions d'une seule variable

Nous avons vu lors du chapitre sur les courbes paramétrées que si l'on dispose d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie "au voisinage" du réel $a \in \mathbb{R}$ (c'est à dire dans un intervalle de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ avec $\eta > 0$) et dérivable au point $a \in \mathbb{R}$, on a : $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + |h|\,\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro. C'est le développement de Taylor de la fonction f au point a.

- Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition D et tel qu'un carré $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ centré en (a, b) est complètement inclus dans D: $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[\subset D$. On suppose f différentiable au point (a, b). Alors on a le développement suivant, encore appelé "formule de Taylor au premier ordre" :
$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,k + \|(h, k)\|\,\varepsilon(h, k)$, où $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers zéro si le point (h, k) tend vers zéro.

- Dérivées partielles secondes et matrice hessienne

On suppose la fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable en tout point $(x, y) \in D$. Alors les deux fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. On se donne enfin un point $(a, b) \in D$ où les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables. On dispose alors de quatre dérivées partielles secondes : $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$, $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$, $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b)$. On les regroupe dans la matrice hessienne :
$H(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b) & \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b) \\ \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b) & \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b) \end{pmatrix}$. Pour les fonctions de deux variables, la dérivée seconde n'est plus un nombre, mais une matrice !

- Théorème de Schwarz : égalité des dérivées croisées

On suppose la fonction f: $D \longmapsto \mathbb{R}$ différentiable sur D. Alors les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies de D dans $\mathbb{R}$. Si elles sont différentiables au point (a, b), on dit que la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b).

Si la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b), les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$ sont égales : $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$. On note indifféremment $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$. En d'autres termes, si la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b), la matrice hessienne $H(a, b)$ en ce point est une matrice symétrique.
Attention aux hypothèses du résultat précédent : la fonction s définie par $s(0, 0) = 0$ et $s(x, y) = x\, y\, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ admet les dérivées partielles secondes croisées différentes à l'origine : $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}\big)(0, 0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}\big)(0, 0)$ [exercice !].

- Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction d'une variable réelle

On se donne une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage du réel $a \in \mathbb{R}$ deux fois dérivable dérivable au point $a \in \mathbb{R}$. On a la formule de Taylor à l'ordre deux :
$f(a+h) = f(a) + f'(a)\, h + \frac{1}{2} f''(a)\, h^2 + |h|^2\, \varepsilon(h)$ et la fonction $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro.

- Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction de deux variables réelles

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition D et comme plus haut, tel qu'un carré
$]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ centré en (a, b) est inclus dans D.
On suppose f différentiable dans ce pavé $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ et les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ différentiables au point (a, b). Alors on a la formule de Taylor à l'ordre deux suivante :
$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, k$
$+\frac{1}{2}\big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2\big] + \|(h, k)\|^2\ \varepsilon(h, k)$, où $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers zéro si le point (h, k) tend vers zéro.
On remarque qu'on peut écrire le terme du second ordre dans la relation précédente sous forme d'un produit de trois matrices, dont la matrice hessienne :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 = (h\ \ k)\ H(a, b)\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$

- Conditions nécessaires de minimum d'une fonction d'une variable réelle

On se donne $a \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f\ :]a-\eta, a+\eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a deux fois dériable en a. On suppose que f admet un minimum (local) au point a :
$f(x) \geq f(a),\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[$. Alors on a $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.

- Un minimum définit un point critique

On suppose que $f\ : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dispose de dérivées partielles continues au voisinage du point $(a, b) \in D$. Si la fonction f admet un minimum (local) au point (a, b), c'est à dire si
$f(x, y) \leq f(a, b)$ pour tout point $(x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$ pour $\eta > 0$ assez petit, alors le point (a, b) est un “point critique” de la fonction f : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.
Dans le cas d'un maximum, $f(x, y) \geq f(a, b)$, $\forall (x, y) \in D$ tel que
$a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$. On a alors également $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

- Conditions nécessaires de minimum à l'ordre deux d'une fonction de deux variables réelles

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, si de plus f admet des dérivées partielles secondes au point (a, b), alors on a pour un minimum
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 \geq 0$ pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Cette famille d'inégalités est équivalente aux deux relations suivantes :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \geq 0$ et $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\, \big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 \geq 0$.

- Conditions nécessaires de maximum à l'ordre deux pour deux variables réelles

Dans le cas d'un maximum au point (a, b), c'est à dire $f(x, y) \geq f(a, b)$ pour tous les points (x, y) au voisinage de (a, b), on a nécessairement
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 \leq 0$ pour tout couple $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Cette famille d'inégalités est équivalente aux deux inégalités : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \leq 0$ et
$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\, \big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 \geq 0$. On remarque qu'une seule des deux inégalités a changé entre le cas du minimum et celui du maximum.

- Condition suffisante de minimum pour une fonction d'une variable réelle

On se donne $a \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f :]a-\eta, a+\eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a deux fois dériable en a. On suppose que la dérivée première est nulle en a: $f'(a) = 0$. On suppose également que la dérivée seconde strictement positive au point a : $f''(a) > 0$. Alors la fonction f admet un minimum (local) au point a: il existe $\theta > 0$ assez petit de sorte que pour tout h tel que $|h| < \theta$, on a $f(a+h) \geq f(a)$.
On note l'importance de l'inégalité stricte pour la dérivée seconde au point a. Si la dérivée seconde est nulle, on ne peut *a priori* rien dire, comme pour la fonction $f(x) = x^3$ au point $a = 0$.

- Condition suffisante de minimum pour une fonction de deux variables réelles

On suppose que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dispose de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ différentiables au voisinage du point $(a, b) \in D$. On suppose d'une part que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ et d'autre part que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ et $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\, \big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 > 0$ (avec des inégalités strictes !). Alors la fonction f admet un minimum local au point (a, b): il existe $\theta > 0$ de sorte que si le point (x, y) satisfait aux inégalités $a-\theta < x < a+\theta$ et $b-\theta < y < b+\theta$, alors $f(x, y) \geq f(a, b)$. On remarque sous les hypothèses précédentes, on a alors forcément $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$.
Par exemple, la fonction $p(x, y) = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)$ satisfait les hypothèses précédentes au point $(0, 0)$ et on a $p(x, y) \geq p(0, 0)$ pour tout (x, y).

- Condition suffisante de maximum pour une fonction de deux variables réelles

Toutes choses égales par ailleurs, si on suppose $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ et
$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\, \big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 > 0$ (toujours avec des inégalités strictes), alors la fonction f admet un maximum local au point (a, b) et $f(x, y) \leq f(a, b)$ dès que le point (x, y) est assez proche du point (a, b).
On remarque que dans ce cas, on a alors nécessairement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

- Point col, ou point selle

On suppose que le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour la fonction f : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. On suppose qu'on a l'inégalité $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 < 0$. Alors le point (a, b) n'est ni un maximum, ni un minimum, mais un "point col" : la fonction f n'est ni supérieure, ni inférieure au nombre $f(a, b)$ au voisinage de (a, b).
C'est le cas par exemple des fonctions $g(x, y) = x^2 - y^2$ et $h(x, y) = x\,y$ au point $(0, 0)$.

Exercices

- Extrema d'une fonction polynomiale [d'après Nathalie Zanon]

On pose $f(x) = 4\,x^3 + 4\,x\,y^2 + x^2 + y^2 - 4\,x$.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'ordre un, puis les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ d'ordre deux de cette fonction.
b) Quels sont les points critiques de la fonction f, c'est à dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on a simultanément $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$?
c) Pour chacun de ces points, déterminer s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un point col.

- Un cas de non égalité des dérivées partielles croisées

On pose $s(x, y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $s(0, 0) = 0$.
a) En passant en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$), montrer que la fonction s est continue en zéro : sa limite, pour (x, y) tendant vers le point $(0, 0)$, est nulle.
b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial s}{\partial y}(x, y)$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) En revenant à la définition d'une dérivée partielle, montrer que $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0) = 0$. De la même façon, montrer que $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0) = 0$.
d) Calculer la limite de l'expression $\frac{1}{y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)\big)$ lorsque y tend vers zéro.
e) En déduire la valeur de la dérivée partielle seconde $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}\big)(0, 0)$.
f) Calculer la limite de l'expression $\frac{1}{x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)\big)$ lorsque x tend vers zéro.
g) En déduire la valeur de la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}\big)(0, 0)$.
h) Les fonctions $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sont-elles différentiables au point $(0, 0)$?

- Méthode de d'Alembert pour l'équation des ondes

On cherche à déterminer l'expression générale d'une fonction $f(x, y)$ régulière solution de l'équation des ondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et on introduit la fonction $g(u, v)$ définie par $g(u, v) = f(x, y)$.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.
b) Exprimer la combinaison $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.
c) Résoudre par intégrations successives l'équation obtenue.
d) En déduire qu'une solution générale $f(x, y)$ de l'équation des ondes peut se décomposer sous la forme $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, où les fonctions d'une seule variable φ et ψ sont arbitraires.

e) Vérifier que si la fonction f est de la forme $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$, elle est bien solution de l'équation des ondes.