

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 12

Introduction à l'intégrale double

- Propriétés fondamentales de l'intégrale simple [rappels]

On se donne deux nombres réels $a < b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale simple $\int_a^b f(x) dx$ de f sur l'intervalle $[a, b]$, notée également $\int_{[a,b]} f$, est un nombre réel qui satisfait aux propriétés fondamentales décrites ci-dessous.

- ★ Longueur. Si $f(x) = 1$ pour tout x , alors $\int_a^b dx = b - a$.
- ★ Linéarité. Si f et g sont deux fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et λ un nombre réel, on a $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.
- ★ Positivité. Si f est une fonction positive, c'est à dire $f(x) \geq 0$ pour tout x , alors l'intégrale est positive : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. On remarque que cette propriété est en défaut si on ne suppose pas $a < b$.

- ★ Additivité par rapport au domaine (relation de Chasles). Si $a < c < b$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Les propriétés précédentes s'étendent tout naturellement pour l'intégrale double, ce qui n'est pas tout à fait le cas des propriétés qui suivent.

- Propriétés spécifiques de l'intégrale simple [rappels]

- ★ Théorème fondamental de l'Analyse et intégration par parties. On suppose f fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Alors l'application ψ définie par $\psi(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ est une fonction dérivable de la variable x et $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(\xi) d\xi \right) = f(x)$. En conséquence, $\int_a^b \frac{df}{dx} d\xi = f(b) - f(a)$. En pratique, on exprime ce résultat de la façon suivante : si on se donne une primitive F de la fonction f (c'est à dire $F' = f$), alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

- ★ Changement de variable. On suppose l'intervalle $[a, b]$ paramétré par une fonction φ bijective croissante régulière de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$: $x = \varphi(t)$ avec $t \in [\alpha, \beta]$. Alors $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

- ★ Calcul de surfaces. Si la fonction f est positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} (toujours avec $a < b$), alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'aire $|\Omega|$ du domaine Ω entre les abscisses a et b d'une part, l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ d'autre part : $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. On a $\int_a^b f(x) dx = |\Omega|$.

- Propriétés fondamentales de l'intégrale double

On se donne une partie bornée Ω du plan \mathbb{R}^2 et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x, y) dx dy$ ou parfois $\iint_\Omega f(x, y) dx dy$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f dx dy$ ou même $\int_\Omega f$.

★ Surface ; intégrale double de la fonction “un”. Si on prend pour domaine Ω le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ du plan \mathbb{R}^2 (avec $a < b$ et $c < d$), l’intégrale double de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est simplement la surface $(b - a)(d - c)$ du rectangle : $\int_{]a, b[\times]c, d[} dx dy = (b - a)(d - c)$. De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, c’est à dire si Ω est inclus dans un rectangle assez grand, l’intégrale double sur Ω de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_{\Omega} dx dy = |\Omega|$.

★ Linéarité. On suppose connue l’intégrale double $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ de la fonction f et on se donne un nombre λ . Alors $\int_{\Omega} (\lambda f)(x, y) dx dy = \lambda \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$. Si on se donne aussi l’intégrale double $\int_{\Omega} g(x, y) dx dy$ de la fonction g , alors $\int_{\Omega} (f + g)(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy + \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$.

★ Positivité. On suppose la fonction f positive sur Ω : $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega$. Alors $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq 0$. Si $f \leq g$ sur Ω c’est à dire $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, alors $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$ [exercice].

★ Additivité par rapport au domaine. On suppose l’ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i “plus simples”, $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l’intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de surface nulle si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l’intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i : $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy$.

- Intégrale d’une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f “étagée” sur Ω , c’est à dire constante sur chacune des parties Ω_i : $\forall i = 1, \dots, N, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \Omega_i, f(x, y) = \lambda_i$. Le calcul de l’intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Omega_i|$ [exercice].

- Intégrale d’une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de \mathbb{R}^2 et par $f \in C^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu’au bord inclus :

$\forall X \in \overline{\Omega}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall Y \in \overline{\Omega}, |X - Y| < \eta \implies |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l’intégrale de f sur Ω est bien définie ; c’est un nombre réel ou éventuellement complexe.

Pour établir ce résultat, on utilise l’uniforme continuité de f et on l’approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_{ε} étagée sur Ω de sorte que $f_{\varepsilon} - \varepsilon \leq f \leq f_{\varepsilon} + \varepsilon$ sur Ω . Alors le nombre $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ satisfait nécessairement aux inégalités

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, y) dx dy - \varepsilon |\Omega| \leq \int_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, y) dx dy + \varepsilon |\Omega|.$$

On montre alors d’une part que le nombre $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ est bien défini et d’autre part qu’on peut l’approcher en calculant l’intégrale d’une fonction étagée qui approche la fonction f .

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de \mathbb{R}^2 borné (ce qui signifie que Ω peut être inclus dans un rectangle assez grand). On se donne une fonction bornée de Ω dans \mathbb{R} à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists M \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega, |f(x, y)| \leq M$. Alors l’intégrale de la valeur absolue de f est finie : $\iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy < \infty$. De plus, l’intégrale double de f dans le domaine Ω existe bien, on a l’inégalité $|\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy| \leq \iint_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$ et on peut toujours intégrer cette fonction de deux variables “dans l’ordre que l’on veut”.

De façon plus précise, si Ω est compris entre deux courbes de la forme $y = \varphi(x)$ comme à la

figure 1, c'est à dire $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\}$, on a $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} dy f(x, y) \right]$. Si Ω est compris entre deux courbes de la forme $x = \psi(x)$ comme à la figure 2, c'est à dire $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(y)\}$, on a $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \left[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} dx f(x, y) \right]$. Dans le cas où le domaine Ω peut être paramétré de l'une ou l'autre manière, on calcule l'intégrale double par l'une quelconque des relations précédentes et $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} dy f(x, y) \right] = \int_c^d dy \left[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} dx f(x, y) \right]$.

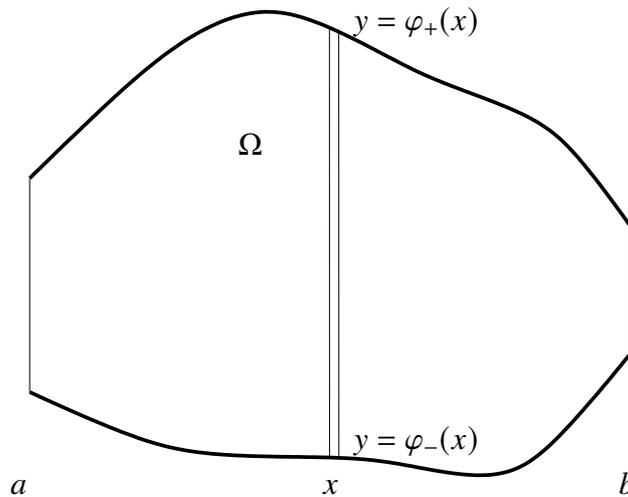


Figure 1. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω , d'abord par intégration de la fonction f par rapport à y entre $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$, puis par intégration en x entre a et b du résultat obtenu.

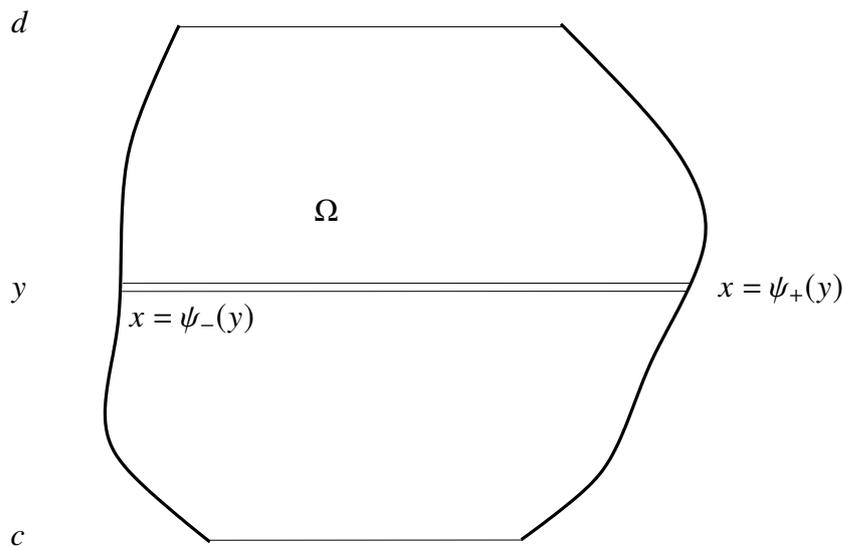


Figure 2. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω , d'abord par intégration de la fonction f par rapport à x entre $\psi_-(y)$ et $\psi_+(y)$, puis par intégration en y entre c et d du résultat obtenu.

- Un premier exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On peut vérifier la conclusion du théorème de Fubini en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur \mathbb{R}^2 redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D , à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Un second exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x, y)| \leq a + b$ si $(x, y) \in T$.

On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a dx \left[\int_0^{b(1-x/a)} dy (x - y) \right]$ et $\int_0^b dy \left[\int_0^{a(1-y/b)} dx (x - y) \right]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6}(a - b)$, valeur de l'intégrale double de la fonction f dans le triangle T .

Exercices

- Domaines rectangulaires

a) Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Calculer l'intégrale double $\int_D xy \, dx \, dy$.

b) Même question avec l'intégrale $\int \int_D x \sin(x + y) \, dx \, dy$ dans le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

- Calcul d'aire

Soit $a < b$ et h trois nombres réels strictement positifs. On note A et B les points de coordonnées $(0, a)$ et (h, b) . On appelle P le parallélogramme bordé par l'axe des abscisses, les droites $x = 0$, $x = h$ et la droite AB .

a) A l'aide d'un calcul intégral classique, rappeler la valeur de l'aire de P .

b) Par un calcul d'intégrale double, retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini et une intégration d'abord selon y puis ensuite selon x .

- Echange de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f définie pour x et y réels. Ecrire l'expression de l'intégrale double $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx f(x, y)$ obtenue après échange de l'ordre des intégrales.