le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 14 — Introduction à l'intégrale triple

- Propriétés fondamentales de l'intégrale triple

On se donne une partie bornée Ω de l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$: Ω est inclus dans un cube assez grand centré sur l'origine. On se donne également une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée : $\exists M \geq 0,\ \forall (x, y, z) \in \Omega,\ |f(x)| \leq M$. L'intégrale triple de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui se note $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ ou parfois
$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

★ Intégrale triple de la fonction "un". On se donne six nombres réels a, α, b, β, c et γ de sorte que $a < \alpha$, $b < \beta$ et $c < \gamma$. Si on prend pour domaine Ω le parallélipipède rectangle $]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[$ de l'espace $\mathbb{R}^3$, l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z) \equiv 1$ est simplement le volume $(\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c)$ du parallélipipède rectangle :
$\iiint_{]a, \alpha[\times]b, \beta[\times]c, \gamma[}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = (\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c)$.
De façon générale, si Ω désigne une partie bornée de l'espace affine euclidien de dimension trois, l'intégrale triple sur Ω de la fonction $f(x, y, z) \equiv 1$ est égale au volume $|\Omega|$ du domaine Ω: $\iiint_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = |\Omega|$.

★ Linéarité. On suppose connue l'intégrale triple $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ de la fonction f et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega (\lambda f)(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \lambda \int_\Omega f(x, y, \,, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$. Si on se donne aussi l'intégrale triple $\int_\Omega g(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ de la fonction g, alors
$\int_\Omega (f + g)(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \int_\Omega g(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

★ Positivité. On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x, y, z) \geq 0,\ \forall (x, y, z) \in \Omega$. Alors $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \geq 0$. Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \Omega$, alors $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \leq \int_\Omega g(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ [exercice].

★ Additivité par rapport au domaine. On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de volume nul si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i: $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i: $\forall i,\ \exists \lambda_i,\ \forall (x, y, z) \in \Omega_i,\ f(x, y, z) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, |\Omega_i|$ [exercice].

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ et par $f \in C^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :

François Dubois, mai 2020.

$\forall X \in \overline{\Omega}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall Y \in \overline{\Omega}$, $|X-Y| < \eta \Longrightarrow |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale triple de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe. On a de plus l'inégalité $|\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z| \leq \iiint_\Omega |f(x, y, z)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ borné et une fonction bornée de Ω dans $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists M \geq 0, \forall (x, y, z) \in \Omega, |f(x, y, z)| \leq M$. Alors l'intégrale triple de la valeur absolue de f est finie : $\iiint_\Omega |f(x, y, z)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z < \infty$. De plus, l'intégrale triple de f dans le domaine Ω existe bien et on peut toujours intégrer cette fonction de trois variables "dans l'ordre que l'on veut". D'une part, écrire que l'intégrale triple est une intégrale simple d'intégrales doubles et d'autre part écrire que l'intégrale triple est l'intégrale double d'une famille d'intégrales simples paramétrées.

- Une intégrale triple est une intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles

On suppose que le domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$ peut être "coupé en tranches horizontales" $\omega(z)$ correspondant à la cote $z =$ constante, pour z entre une valeur minimale $z_{\min}$ et une valeur maximale $z_{\max}$: $\omega(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) \in \Omega\}$. On a donc
$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \omega(z), z_{\min} \leq z \leq z_{\max}\}$. Alors si f est une fonction bornée (pour fixer les idées) définie de Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a
$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \mathrm{d}z \left[\iint_{\omega(z)} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, f(x, y, z) \right]$.

- Un premier calcul du volume d'une boule de rayon R

On se donne une longueur $R \geq 0$ et on introduit la boule (fermée) B de centre l'origine et de rayon R: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. On a alors, avec les notations du paragraphe précédent : $z_{\min} = -R$ et $z_{\max} = R$. De plus, si $|z| \leq R$, $\omega(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$: c'est un disque de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$, donc de surface $|\omega(z)| = \pi (R^2 - z^2)$. Le théorème de Fubini du paragraphe précédent avec $f \equiv 1$ montre que $|\Omega| = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - z^2)\, \mathrm{d}z = \frac{4}{3} \pi R^3$.

- Une intégrale triple est une intégrale double d'une famille d'intégrales simples

On suppose dans ce paragraphe que l'intersection du domaine Ω et du plan $x\mathrm{O}y$ est une surface plane ω_0 de sorte que la frontière $\partial\Omega$ peut être paramétrée par deux surfaces auxiliaires d'équations $z = \varphi_-(x, y)$ et $z = \varphi_+(x, y)$ qui s'appuient sur ω_0 :
$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x, y) \in \omega_0, \varphi_-(x, y) \leq z \leq \varphi_+(x, y)\}$. On a alors pour une fonction f bornée sur Ω: $\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iint_{\omega_0} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \left[\int_{\varphi_-(x,y)}^{\varphi_+(x,y)} \mathrm{d}z\, f(x, y, z) \right]$.

- Un second calcul du volume d'une boule de rayon R

On pose toujours $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. On la coupe maintenant par des droites verticales qui passent par le disque ω_0 centré à l'origine et de rayon R. On a alors
$\varphi_-(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $\varphi_+(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Le théorème de Fubini du paragraphe précédent nous donne (avec la fonction identiquement égale à 1),
$|\Omega| = 2 \iint_{\omega_0} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. On calcule ensuite cette intégrale double en passant en coordonnées polaires : $|\Omega| = 2 \int_0^R r\, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et après un calcul [pas si facile !] laissé au lecteur, on établit à nouveau que $|\Omega| = \frac{4}{3} \pi R^3$.

- Changement de variables

On suppose que le domaine Ω est paramétré par $(\xi, \eta, \zeta) \in Q$ à l'aide des fonctions X, Y et Z: $x = X(\xi, \eta, \zeta)$, $y = Y(\xi, \eta, \zeta)$ et $z = Z(\xi, \eta, \zeta)$. La transformation $\Phi : Q \longrightarrow \Omega$ qui à tout point $(\xi, \eta, \zeta) \in Q$ associe le point $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \big(X(\xi, \eta, \zeta), Y(\xi, \eta, \zeta), Z(\xi, \eta, \zeta)\big) \in \Omega$ est supposée à la fois régulière et bijective. De façon plus précise, on dispose de dérivées partielles continues des fonctions de trois variables X, Y et Z et Φ est différentiable sur Q. De plus, pour tout point $(x, y, z) \in \Omega$, il existe un unique point $(\xi, \eta, \zeta) \in Q$ de sorte que $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, z)$. On peut exprimer l'intégrale triple $\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ à l'aide d'une intégrale triple sur Q, mais en prenant des précautions !

On forme d'abord la matrice jacobienne J_Φ de l'application Φ au point courant

$$(\xi, \eta, \zeta) \in Q: \; J_\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial X}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial X}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Y}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Z}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \end{pmatrix}.$$

On considère ensuite le déterminant $\det J_\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ de cette matrice :

$$\det J_\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \det\left(J_\Phi(\xi, \eta, \zeta)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial X}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial X}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Y}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \\ \frac{\partial Z}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Z}{\partial \eta}(\xi, \eta, \zeta) & \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(\xi, \eta, \zeta) \end{vmatrix}.$$

Enfin, on prend la valeur absolue $|\det J_\Phi(\xi, \eta, \zeta)|$ de ce déterminant. Alors on a l'égalité suivante entre intégrales triples :

$\iiint_\Omega f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_Q f\big(\Phi(\xi, \eta, \zeta)\big)\,|\det J_\Phi(\xi, \eta, \zeta)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$.

Une utilisation de cette relation pour les coordonnées polaires est proposée en exercice.

Exercices

- Tétraèdre de référence

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on se donne le tétraèdre T défini par

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x + y + z \leq 1\}$.

a) En utilisant la propriété de Fubini qu'une intégrale triple est une intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles, calculer le volume $|T|$ du tétraèdre.

b) Refaire le même calcul grâce à l'autre facette du théorème de Fubini : une intégrale triple est une intégrale double d'une famille d'intégrales simples.

c) Montrer que $\int_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$.

- Cylindre

On se donne $a > 0$ et on appelle C le cylindre de $\mathbb{R}^3$ composés des points (x, y, z) qui satisfont aux inégalités $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $0 \leq z \leq a$. Montrer que $\int_C \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi\, a^3$. On pourra utiliser les coordonnées semi-polaires (r, φ, p) définies par $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = p$.

- Boule unité

On désigne par B la boule unité de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Montrer que $\int_B \cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi\left(\sin(1) - \cos(1)\right)$.

- Coordonnées polaires dans l'espace euclidien de dimension trois

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on rappelle que l'on peut paramétrer les points par les coordonnées polaires (r, θ, φ) de sorte que $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$ avec $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. On note Φ la transformation $(r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi)$ ainsi définie.

a) L'application Φ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

b) Calculer la matrice jacobienne J_Φ des dérivées partielles de x, y et z par rapport aux variables r, θ et φ.

c) Calculer ensuite le déterminant $\det J_\Phi(r, \theta, \varphi)$ de la matrice $J_\Phi(r, \theta, \varphi)$ et montrer que $\det J_\Phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin\theta$.

d) Montrer qu'avec les choix faits pour l'angle θ, ce déterminant est toujours positif ou nul.

e) En déduire que si le domaine Ω est paramétré par un domaine Q avec les coordonnées polaires, c'est à dire $Q \ni (r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) \in \Omega$, on a
$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_Q f\big(\Phi(r, \theta, \varphi)\big)\, r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi$.

f) Si Ω est la boule de centre l'origine et de rayon R, quel est le domaine Q des paramètres (r, θ, φ) pour les coordonnées polaires ?

g) En déduire, à l'aide de la formule de changement de variable donnée à la question e), le volume $|\Omega|$ de la boule de centre l'origine et de rayon R.

- Encore la boule unité

On se donne $a \geq 0$ et on désigne par B la boule unité de $\mathbb{R}^3$:
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

a) Montrer que si $a > 1$, $\int_B \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \frac{4\pi}{3a}$.

b) Dans le cas $a \leq 1$, établir la relation $\int_B \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = 2\pi \left(1 - \frac{a^2}{3}\right)$.

c) Dans le cas limite $a = 1$, la relation précédente est-elle cohérente avec ce qui est connu par aileurs ?

d) Reprendre le cas $a = 0$ et vérifier la cohérence avec le résultat obtenu à la question b).

- Pour terminer en beauté !

On se donne a tel que $0 < a < 1$. On note S la nappe paramétrée définie par les relations $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = \sin\varphi$ avec $\varphi \in [0, \pi]$ et $r \in [a, 1]$.

a) Montrer que S peut s'écrire à l'aide de l'équation $z = f(x, y)$, avec une fonction f que l'on précisera.

b) Montrer que le volume V entre la surface S et le plan $x\mathrm{O}y$ est donné par $V = 1 - a^2$.