le cnam

MVA006 - Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Examen première session, 19 juin 2017

Enseignant responsable :

François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours,

sous forme papier

et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours d'Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire" (MVA006)

Examen du 19 juin 2018 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Droites dans l'espace

On se donne un espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension trois et on appelle E_3 l'espace vectoriel qui le dirige. On se donne un repère affine de $\mathcal{E}_3$ composé d'une part de l'origine $O \in \mathcal{E}_3$ et d'autre part de la base $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ de l'espace E_3. On se donne un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, deux points A et B de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et deux vecteurs u et v de coordonnées $u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. On note D la droite contenant le point A et dirigée par le vecteur u et Δ la droite contenant le point B et dirigée par le vecteur v.

a) Verifier que quel que soit la valeur du paramètre α, les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

b) Pour quelle valeur du paramètre α les droites D et Δ sont coplanaires ?

c) Dans ce cas, calculer leur point d'intersection I.

d) Toujours avec la même hypothèse, établir l'équation du plan P qui contient les deux droites D et Δ.

Exercice 2) Orthogonalisation en dimension trois

On se donne un espace vectoriel euclidien orienté E_3 de dimension trois. On note $(u,\, v)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E_3. On se donne un nombre $a \in \mathbb{R}$ et trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 par leurs coordonnées dans une base orthonormée directe de référence :
$u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

a) Pour quelles valeurs du paramètre a la famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ est-elle libre ?

Dans le cas où la famille $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ est libre, on cherche à la modifier en une nouvelle famille $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ orthogonale de sorte que d'une part $e_1 = u_1$ et d'autre part e_2 appartient au plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et u_2.

b) Ecrire les relations imposées aux vecteurs e_1, e_2 et e_3 pour exprimer que la famille $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ est orthogonale.

c) Montre que si on cherche e_2 sous la forme $e_2 = u_2 - \beta\, e_1$, on peut trouver le paramètre α de sorte que la famille des deux vecteurs $(e_1,\, e_2)$ soit orthogonale.

d) Préciser la valeur de β et expliciter le vecteur e_2 obtenu à l'aide de ce procédé.

e) Expliciter une valeur possible du vecteur e_3 de sorte que la famille $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ soit orthogonale.

Exercice 3) Courbe paramétrée

On se propose d'étudier quelques propriétés de la courbe Γ du plan décrite par les équations $x(t) = \frac{t^2}{1+t}$, $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$ dans un reprère orthonormé.

a) Montrer que pour une valeur particulière t_0 que l'on déterminera, le point de coordonnées $(x(t_0),\, y(t_0))$ est un point singulier : les deux dérivées $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$ sont nulles.

b) Préciser la tangente à la courbe Γ en ce point de coordonnées $(x(t_0),\, y(t_0))$.

c) Quelle est la nature de la branche infinie à la courbe Γ si t tend vers -1 ?

d) Quelle est la nature de la branche infinie à la courbe Γ si t tend vers l'infini ?

e) Dessiner l'allure des branches infinies de la courbe Γ.

Exercice 4) Points extrémaux

Pour $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,\, y) = -(x^2 + 2\, y^2) + (x^2 + y^2)^2$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ de la fonction f en un point quelconque du plan.

b) Pour quelles valeurs de $(x,\, y)$ dispose-t-on d'un point critique, c'est à dire d'un point où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ sont nulles toutes deux ?

c) Calculer la matrice hessienne $H(x,\, y)$ des dérivées partielles secondes de la fonction f.

d) Pour chacun des cinq points critiques trouvés à la question b), préciser s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point col.

Exercice 5) Intégrale double

On se donne $R > 0$ et on note D le demi-disque de centre l'origine, de rayon R et placé au dessus de l'axe des abscisses : $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq R^2,\, y \geq 0\}$. On pose aussi $f(x,\, y) = y^2$.

a) Dessiner le disque D.

b) Montrer qu'en coordonnées polaires ($x = r\, \cos\theta,\ y = r\, \sin\theta$), le demi-disque D est décrit par des inégalités simples que l'on précisera.

c) Calculer l'intégrale double $I = \iint_D f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.