le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours d'Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire **(MVA006)**

Examen du 16 juin 2020 (2 heures 45 minutes)

Cette épreuve se déroule en temps limité, à distance et sans surveillance particulière. Merci de bien respecter la durée de 2 heures et 45 minutes. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1) Système linéaire paramétré

On se donne un paramètre $p \in \mathbb{R}$ et des nombres réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. On introduit le système linéaire d'inconnues réelles $x,\ y,\ z$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x - y & = & \alpha \\ -x + 2\,y - z & = & \beta \\ -y + p\,z & = & \gamma. \end{array} \right.$$

a) À l'aide des deux premières équations, trouver une relation linéaire entre y et z.

b) En reportant la valeur trouvée en a) dans la troisième équation, expliciter à quelle condition sur le paramètre p le système linéaire a une unique solution.

c) Retrouver ce résultat avec un calcul de déterminant.

d) Résoudre le système linéaire $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x - y & = & 3 \\ -x + 2\,y - z & = & -2 \\ -y + 2\,z & = & 3. \end{array} \right.$

Exercice 2) Droites dans l'espace

On se donne un espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension trois et on appelle E_3 l'espace vectoriel qui le dirige. On se donne un repère affine de $\mathcal{E}_3$ composé d'une part de l'origine $\mathrm{O} \in \mathcal{E}_3$ et d'autre part de la base $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ de l'espace E_3. On se donne un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, deux points A et B de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives : $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et deux vecteurs u et v de coordonnées $u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note D la droite contenant le point A et dirigée par le vecteur u et Δ la droite contenant le point B et dirigée par le vecteur v.

a) Verifier que quel que soit la valeur du paramètre α, les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

b) Pour quelle valeur du paramètre α les droites D et Δ sont-elles coplanaires ?

c) Dans ce cas, calculer leur point d'intersection I.

d) Toujours avec la même hypothèse, établir l'équation du plan P qui contient les deux droites D et Δ.

Exercice 3) Points extrémaux

Pour $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,\, y) = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}\,(x^2 + x\,y + y^2)^2$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ de la fonction f en un point quelconque du plan.

b) Calculer la matrice hessienne $H(x,\, y)$ des dérivées partielles secondes de la fonction f.

c) Pour quelles valeurs de $(x,\, y)$ dispose-t-on d'un point critique, c'est à dire d'un point où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ sont nulles toutes deux ? On pourra considérer les cas $x + y = 0$ et $x + y \neq 0$.

d) Pour chacun des cinq points critiques trouvés à la question c), préciser s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point col.

Exercice 4) Intégrale triple

On se donne $a > 0$ et $R > 0$. On appelle C le volume de $\mathbb{R}^3$ de forme semi-cylindrique composé des points $(x,\, y,\, z)$ qui satisfont aux inégalités $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq z \leq a$. On introduit les coordonnées semi-polaires $(r,\, \varphi,\, p)$ définies par $x = r\,\cos\varphi$, $y = r\,\sin\varphi$, $z = p$. On suppose $r \geq 0$.

a) Expliciter à quelles conditions sur $(r,\, \varphi,\, p)$ le point $M = (x,\, y,\, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à C.

b) Quelle est la matrice jacobienne $J(r,\, \varphi,\, p)$ de la transformation $(r,\, \varphi,\, p) \longmapsto (x,\, y,\, z)$?

c) Calculer le jacobien $j(r,\, \varphi,\, p) = |\det\,(J(r,\, \varphi,\, p))|$.

d) Calculer le volume V du domaine C.

e) Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_C \frac{x\,z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}z$.