

Devoir 2

à rendre pour la séance numéro 7, le 24 mars 2020

Problème - Espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux

On appelle P_2 l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a + bt + ct^2\}.$$

- 1) Montrer que muni de l'addition des fonctions $((f + g)(t) = f(t) + g(t))$ et de leur multiplication par un scalaire $((\lambda \cdot f)(t) = \lambda f(t))$, l'ensemble P_2 est un espace vectoriel.
- 2) Pour tout nombre réel t , on pose $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = t^2$. Montrer que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de P_2 . Dans la suite, cette base est nommée "base canonique".
- 3) Montrer que l'opérateur de dérivation D défini pour $f \in P_2$ par $(Df)(t) = f'(t)$ (la dérivation usuelle !) définit une application linéaire de P_2 dans lui-même.
- 4) Quelle est l'expression des fonctions De_0 , De_1 et De_2 dans la base canonique ?
- 5) Que vaut $\ker D$?
- 6) Que vaut $\text{Im } D$?
- 7) En déduire la matrice de la dérivation D dans la base canonique de P_2 . Cette matrice sera notée Δ dans la suite.

On se propose de construire une nouvelle base de P_2 de la façon suivante. On se donne les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. On introduit aussi le symbole de Kroneker δ_{ij} qui vaut 1 si $i = j$ et zéro sinon. On se propose de montrer que pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, il existe un et un seul polynôme $\varphi_i \in P_2$ de sorte que (1) $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout $j = 0, 1, 2$.

- 8) Ecrire les neuf relations (1) pour toutes les valeurs des entiers i et j entre 0 et 2.
- 9) Calculer les expressions de $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ pour toutes les valeurs de la variable réelle t .
- 10) Exprimer les fonctions φ_0 , φ_1 et φ_2 dans la base canonique de P_2 .
- 11) Montrer que pour tout nombre réel t , $\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1$.
- 12) Montrer que la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une base de P_2 .
- 13) Quelle est la matrice de passage P entre les bases (e_0, e_1, e_2) et $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$?
- 14) Exprimer les vecteurs de la famille (e_0, e_1, e_2) en fonction de la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.
- 15) En déduire une explicitation de la matrice P^{-1} .
- 16) Si on note I la matrice identité à trois lignes et trois colonnes, vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
- 17) [Question facultative] Quelle est la matrice de l'opérateur de dérivation D relativement à la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$?