Département de Mathématiques et Statistiques

Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l Algèbre Linéaire **(MAA006)**

Devoir 2
à rendre pour la séance numéro 7, le 27 mars 2018

Problème - Espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux

On appelle P_2 l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à deux :
$P_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, \exists\, a,\, b,\, c \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = a\, + b\, t + c\, t^2\}$.

1) Montrer que muni de l'addition des fonctions ($(f+g)(t) = f(t) + g(t)$) et de leur multiplication par un scalaire ($(\lambda \cdot f)(t) = \lambda\, f(t)$), l'ensemble P_2 est un espace vectoriel.

2) Pour tout nombre réel t, on pose $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = t^2$. Montrer que la famille $(e_0,\, e_1, e_2)$ est une base de P_2. Dans la suite, cette base est nommée "base canonique".

3) Montrer que l'opérateur de dérivation D défini pour $f \in P_2$ par $(Df)(t) = f'(t)$ (la dérivation usuelle !) définit une application linéaire de P_2 dans lui-même.

4) Quelle est l'expression des fonctions De_0, De_1 et De_2 dans la base canonique ?

5) Que vaut $\ker D$?

6) Que vaut $\mathrm{Im}\, D$?

7) En déduire la matrice de la dérivation D dans la base canonique de P_2. Cette matrice sera notée Δ dans la suite.

On se propose de construire une nouvelle base de P_2 de la façon suivante. On se donne les trois points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. On introduit aussi le symbole de Kroneker δ_{ij} qui vaut 1 si $i = j$ et zéro sinon. On se propose de montrer que pour tout $i \in \{0,\, 1,\, 2\}$, il existe un et un seul polynôme $\varphi_j \in P_2$ de sorte que (1) $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

8) Ecrire les neuf relations (1) pour toutes les valeurs des entiers i et j entre 0 et 2.

9) Calculer les expressions de $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ pour toutes les valeurs de la variable réelle t.

10) Exprimer les fonctions φ_0, φ_1 et φ_2 dans la base canonique de P_2.

11) Montrer que pour tout nombre réel t, $\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1$.

12) Montrer que la famille $(\varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2)$ est une base de P_2.

13) Quelle est la matrice de passage P entre les bases $(e_0,\ e_1, e_2)$ et $(\varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2)$?

14) Exprimer les vecteurs de la famille $(e_0,\ e_1, e_2)$ en fonction de la famille $(\varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2)$.

15) En déduire une explicitation de la matrice P^{-1}.

16) Si on note I la matrice identité à trois lignes et trois colonnes, vérifier que
$P\, P^{-1} = P^{-1}\, P = \mathrm{I}$.

17) Quelle est la matrice de l'opérateur de dérivation D relativement à la base $(\varphi_0,\, \varphi_1,\, \varphi_2)$?

François Dubois, 13 mars 2018.