

### Devoir 3 à rendre pour la séance numéro 10, le 17 avril 2018

#### Exercice 1 - Perpendiculaire commune à deux droites

On se donne un repère orthonormé de l'espace euclidien  $\mathcal{E}_3$ . On considère la droite  $D$  contenant le point  $A(1, 2, 3)$  et dirigée par le vecteur  $u(1, 1, 1)$ . On se donne également la droite  $D'$  passant par  $B(-2, 0, 1)$  et dirigée par le vecteur  $v(1, 2, 1)$ .

- Les droites  $D$  et  $D'$  sont-elles parallèles ?
- Les droites  $D$  et  $D'$  sont-elles coplanaires ?
- Calculer  $w = u \times v$ .
- Montrer qu'il existe une unique droite  $\Delta$  dirigée par  $w$  et coupant les droites  $D$  et  $D'$  en des points  $I$  et  $I'$ . La droite  $\Delta$  est la perpendiculaire commune aux droites  $D$  et  $D'$ .
- Calculer les coordonnées des points  $I$  et  $I'$  et la distance  $II'$ .
- Montrer que quel que soit  $M \in D$  et  $M' \in D'$ , on a  $d(M, M') \geq d(I, I')$ .

#### Exercice 2 - Division vectorielle

On se donne deux vecteurs  $a$  et  $b$  de l'espace vectoriel euclidien  $E_3$  de dimension trois. On suppose que le vecteur  $a$  est non nul :  $a \neq 0$ . On cherche à résoudre l'équation (1)  $a \times x = b$  d'inconnue  $x \in E_3$ . Le problème (1) est appelé "division vectorielle".

- Si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des vecteurs arbitraires de  $E_3$ , rappeler la formule du double produit vectoriel pour expliciter  $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ .
- Montrer que si les vecteurs  $a$  et  $b$  ne sont pas orthogonaux, l'équation (1) n'a pas de solution.
- On suppose dans cette question  $b = 0$ . Montrer qu'alors tout vecteur  $x$  solution de l'équation (1) est colinéaire au vecteur  $a$  : il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \lambda a$ .
- Si les vecteurs  $a$  et  $b$  sont non nuls tous deux et si leur produit scalaire  $(a, b)$  est nul, résoudre l'équation (1). On pourra se placer dans le repère  $(a, b, a \times b)$  qui est orthogonal mais non orthonormé.