

Devoir 4

à rendre pour la séance numéro 13, le 21 mai 2019

Expression du Laplacien en coordonnées polaires

On se donne un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2)$ du plan affine euclidien \mathcal{E}_2 . Un point M arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes x, y dans le repère $(O; e_1, e_2)$ de sorte que $\overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2$. Il a aussi des coordonnées polaires (r, θ) de sorte que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

On se donne une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le Laplacien Δf de la fonction f est la fonction de deux variables définie par $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

- 1) Calculer le laplacien de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.
- 2) Sachant que $r^2 = x^2 + y^2$, montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$ sont respectivement égales à $\frac{x}{r} = \cos \theta$ et $\frac{y}{r} = \sin \theta$.
- 3) De même, partant de la relation $\tan \theta = \frac{y}{x}$, montrer que l'on a $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta$.

On exprime f en coordonnées polaires ; il existe donc une fonction $g(r, \theta)$ de sorte que $f(x, y) \equiv g(r, \theta)$. De façon plus précise, la fonction g satisfait à $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- 4) Que vaut la fonction g si $f(x, y) = x^2 + y^2$? Même question pour $f_1(x, y) = \frac{y}{x}$.
- 5) Montrer avec la règle de dérivation des fonctions composées et les résultats des questions 2) et 3) que l'on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$.
- 6) Afin de dériver une nouvelle fois par rapport à x la première expression et par rapport à y la seconde, montrer en utilisant les relations précédentes pour des fonctions bien choisies, que l'on a $\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta) = \frac{1}{r} \sin^2 \theta$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r} \sin \theta) = -\frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$, $\frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta) = \frac{1}{r} \cos^2 \theta$ et $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r} \cos \theta) = -\frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$.
- 7) A partir des relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$, de la règle de dérivation d'un produit et des relations proposées à la question 6), en déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et fonction de $r, \theta, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$. Attention, chacun des résultats pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ comporte cinq termes !
- 8) Déduire de la question précédente que $\Delta f(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.