le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire **(MAA006)**

Devoir 4
à rendre pour la séance numéro 13, le 29 mai 2018

Expression du Laplacien en coordonnées polaires

On se donne un repère orthonormé direct $(O\,;\,e_1\,,\,e_2)$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$. Un point M arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes $x,\,y$ dans le repère $(O\,;\,e_1\,e_2)$ de sorte que $\overrightarrow{OM} = x\,e_1 + y\,e_2$. Il a aussi des coordonnées polaires $(r,\,\theta)$ de sorte que $x = r\,\cos\theta$ et $y = r\,\sin\theta$.

On se donne une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le Laplacien Δf de la fonction f est la fonction de deux variables définie par $\Delta f(x,\,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) Calculer le laplacien de la fonction $f(x,\,y) = x^2 + y^2$.

2) Sachant que $r^2 = x^2+y^2$, montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$ sont respectivement égales à $\frac{x}{r} = \cos\theta$ et $\frac{y}{r} = \sin\theta$.

3) De même, partant de la relation $\tan\theta = \frac{y}{x}$, montrer que l'on a $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r}\,\sin\theta$ et $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}\,\cos\theta$.

On exprime f en coordonnées polaires ; il existe donc une fonction $g(r,\,\theta)$ de sorte que $f(x,\,y) \equiv g(r,\,\theta)$. De façon plus précise, la fonction g satisfait à $g(r,\,\theta) = f(r\,\cos\theta,\,r\,\sin\theta)$.

4) Que vaut la fonction g si $f(x,\,y) = x^2 + y^2$? Même question pour $f_1(x,\,y) = \frac{y}{x}$.

5) Montrer avec la règle de dérivation des fonctions composées et les résultats des questions 2) et 3) que l'on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial\theta}$.

6) Afin de dériver une nouvelle fois par rapport à x la première expression et par rapport à y la seconde, montrer en utilisant les relations précédentes pour des fonctions bien choisies, que l'on a $\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) = \frac{1}{r}\,\sin^2\theta$, $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{1}{r}\,\sin\theta\big) = -\frac{2}{r^2}\,\sin\theta\,\cos\theta$, $\frac{\partial}{\partial y}(\sin\theta) = \frac{1}{r}\,\cos^2\theta$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{1}{r}\,\cos\theta\big) = -\frac{2}{r^2}\,\sin\theta\,\cos\theta$.

7) A partir des relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial\theta}\big)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial\theta}\big)$, de la règle de dérivation d'un produit et des relations proposées à la question 6), en déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et fonction de r, θ, $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial r\,\partial\theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$. Attention, chacun des résultats pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ comporte cinq termes !

8) Déduire de la question précédente que $\Delta f(x,\,y) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\big(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$.

François Dubois, 15 mai 2018.