le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 6 Droites et plans en dimension trois

- Complément d'algèbre linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F avec E de dimension finie et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de E dans F. Alors $\ker u$, qui est un sous espace vectoriel de E est de dimension finie et $\mathrm{Im}\, u$, sous espace vectoriel de F est également de dimension finie. De plus, on a l'égalité suivante entre les dimensions de ces espaces : $\dim(\ker u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim E$.

- Espace affine de dimension trois

On se donne un espace vectoriel E_3 sur $\mathbb{R}$ de dimension trois (par exemple $\mathbb{R}^3$). On dispose donc de "vecteurs" $u \in E_3$ et de l'addition $u+v$ de deux vecteurs u et v de E_3. Un espace affine $\mathscr{E}_3$ dirigé par E_3 (par exemple $\mathbb{R}^3$ à nouveau !) est un ensemble de "points" $A \in \mathscr{E}_3$ tels qu'il existe une addition $\mathscr{E}_3 \times E_3 \longrightarrow \mathscr{E}_3$ qui à un couple (A, u) d'un point et d'un vecteur associe un et un seul point $B = A+u$. On doit avoir d'une part $A+0 = A$ pour tout point A de $\mathscr{E}_3$ et d'autre part $(A+u)+v = A+(u+v)$ pour tous les points $A \in \mathscr{E}_3$ et tous les vecteurs u et v de l'espace vectoriel E_3.

Avec des notations élémentaires, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = u$ à la place de $B = A+u$ et la relation $(A+u)+v = A+(u+v)$ est une reformulation de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

- Repère affine

On se donne un point $\mathrm{O} \in \mathscr{E}_3$ et une base (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel E_3. Alors le quadruplet $(\mathrm{O}\,; e_1, e_2, e_3)$ est appelé repère affine de l'espace $\mathscr{E}_3$. Pour tout point $M \in \mathscr{E}_3$, il existe des nombres uniques x_1, x_2 et x_3 de sorte que $M = \mathrm{O} + x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$, relation que l'on peut écrire aussi $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$.

- Droite affine dans un espace affine en dimension trois

On se donne un point $A \in \mathscr{E}_3$ et un vecteur non nul $u \in E_3$. La droite affine D contenant A et dirigée par la droite vectorielle $\Delta = < u > = \{v \in E_3, \exists\, \theta \in \mathbb{R}, v = \theta\, u\}$ est par définition l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}_3$ qui peuvent s'écrire sous la forme $M = A + \theta\, u$ pour un certain nombre $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc $M \in D$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \theta\, u$.

Une droite affine est un sous-espace affine de $\mathscr{E}_3$ de dimension un.

Par exemple, on se donne un repère affine $(\mathrm{O}\,; e_1, e_2, e_3)$ et trois nombres réels a, b et c. L'ensemble des points M dont les coordonnées (x_1, x_2, x_3) sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ de sorte que $x_1 = a+t$, $x_2 = b$ et $x_3 = c$ est une droite affine dirigée par la droite vectorielle $< e_1 >$.

François Dubois, mars 2022.

- Droite affine passant par deux points non confondus

On se donne deux points A et $B \in \mathscr{E}_3$ non confondus, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est non nul : $\overrightarrow{AB} \neq 0$. La droite notée simplement (AB) est la droite affine contenant le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$: $M \in (AB)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = \theta \overrightarrow{AB}$.

- Plan affine dans un espace affine de dimension trois

Un plan affine P est un sous espace affine de $\mathscr{E}_3$ de dimension deux.
On se donne un point $A \in \mathscr{E}_3$ et un plan vectoriel Π (sous espace vectoriel de E_3 de dimension deux) engendré par les vecteurs u et v de E_3 qui constituent par hypothèse une famille libre : $\Pi =< u, v >$, espace vectoriel engendré par u et v. Le plan affine P contenant A et dirigé par Π est par définition l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}_3$ qui peuvent s'écrire sous la forme
$M = A + \theta\, u + t\, v$ pour la donnée de deux nombres réels θ et t. On a donc $M \in P$ si et seulement si il existe θ et $t \in \mathbb{R}$, de sorte que $\overrightarrow{AM} = \theta\, u + t\, v$.
Par exemple, dans un repère $(\mathrm{O}\,; e_1, e_2, e_3)$, on dispose des trois plans affines nommés traditionnellement "xOy", "yOz" et "zOx", contenant l'origine et dirigés respectivement par les plans vectoriels $< e_1, e_2 >$, $< e_2, e_3 >$ et $< e_3, e_1 >$.

- Plan affine passant par trois points non alignés

On se donne trois points A, B et C non alignés de l'espace affine $\mathscr{E}_3$. D'un point de vue géométrique, le point C n'appartient pas à la droite (AB). Ceci signifie signifie que la famille de deux vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. Le plan notée (ABC) est égal par définition au plan affine contenant le point A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $M \in (ABC)$ si et seulement si il existe θ et $t \in \mathbb{R}$, tels que $\overrightarrow{AM} = \theta \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}$.

- Equation d'un plan affine dans l'espace de dimension trois

On se donne un repère affine $(\mathrm{O}\,; i, j, k)$ de l'espace affine $\mathscr{E}_3$ et un plan affine P inclus dans $\mathscr{E}_3$. Alors il existe trois réels non tous nuls $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et un réel d de sorte que M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(\mathrm{O}\,; i, j, k)$ appartient au plan P si et seulement si $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.
La preuve de cette propriété consiste à écrire la relation $M = A + t\,u + \theta\,v$ pour un point A de coordonnées (α, β, γ) et deux vecteurs u et v de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3). De plus les deux vecteurs u et v forme un système libre et l'un des trois déterminants $u_1 v_2 - u_2 v_1$, $u_2 v_3 - u_3 v_2$, $u_3 v_1 - u_1 v_3$ est non nuls. Supposons $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ pour fixer les idées. Si le point courant $M \in P$ a pour coordonnées (x, y, z), on en déduit $x = \alpha + t\,u_1 + \theta\,v_1$, $y = \beta + t\,u_2 + \theta\,v_2$, $z = \gamma + t\,u_3 + \theta\,v_3$. On multiplie la première relation par v_2 et la seconde par $-v_1$ et on additionne. Il vient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)\,t = v_2\,(x-\alpha) - v_1\,(y-\beta)$. Si on multiplie maintenant la première relation par $-u_2$ et la deuxième par u_1, on obtient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\theta = -u_2\,(x-\alpha) + u_1\,(y-\beta)$. On reporte ces résultats dans la troisième équation et il vient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)\,(z-\gamma) = -(u_2 v_3 - u_3 v_2)\,(x-\alpha) - (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,(y-\beta)$. Cette relation est de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $a = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $b = u_3 v_1 - u_1 v_3$ et $c = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Avec l'hypothèse faite ici, on a $c \neq 0$ donc $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et le résultat est établi. $\square$

Réciproquement, si on se donne un repère affine $(\mathrm{O}\,; i, j, k)$ de $\mathscr{E}_3$, trois réels non tous nuls $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $d \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}_3$ de coordonnées (x, y, z) dans le

repère $(\mathrm{O}\,; i,\, j, k)$ qui satisfont à l'équation $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ est un plan affine.
La preuve consiste à caractériser les points de l'ensemble
$P=\{M\in\mathscr{E}_3,\, a\,x+b\,y+c\,z+d=0\}$. Comme $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, on peut par exemple supposer $a\neq 0$. Alors le point A de coordonnées $(-\frac{d}{a},0,0)$ appartient à l'ensemble P. On peut introduire deux vecteurs u et v dont les coordonnées sont solution de l'équation homogène $a\,x+b\,y+c\,z=0$. Par exemple u de coordonnées $(-b,a,0)$ et v de coordonnées $(-c,0,a)$. Ces deux vecteurs forment un système libre car si la combinaison linéaire $t\,u+\theta\,v$ est nulle, on a les relations $-(bt+c\,\theta)=0$, $at=0$ et $a\,\theta=0$, donc les coefficients t et θ sont tous les deux nuls. On vérifie enfin que si le point M arbitraire appartient à l'ensemble P, on peut le décomposer sous la forme $M=A+t\,u+\theta\,v$. Or les trois composantes de cette relation s'écrivent $-(bt+c\,\theta)=x+\frac{d}{a}$, $at=y$ et $a\,\theta=z$. Les deux dernières relations fournissent les valeurs nécessaires des paramètres t et θ et la première s'écrit alors $-(b\,\frac{y}{a}+c\,\frac{z}{a})=x+\frac{d}{a}$, qui redonne exactement l'équation initiale $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$. La propriété est établie. $\square$

De plus, si le plan affine P a pour équation $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ dans le repère affine $(\mathrm{O}\,; i,\, j, k)$, alors le plan vectoriel Π qui le dirige est caractérisé dans la base $(i,\, j, k)$ par l'équation homogène associée $a\,x+b\,y+c\,z=0$.

- Intersection de deux plans affines dans l'espace de dimension trois

On se donne deux plans affines $P=A+<u,v>$ et $P'=A'+<u',v'>$ dans l'espace affine $\mathscr{E}_3$. Si les deux plans directeurs $\Pi\equiv<u,v>$ et $\Pi'\equiv<u',v'>$ sont égaux, alors les plans P et P' sont parallèles. Leur intersection est vide si $A\notin P'$ et $P=P'$ dans le cas contraire.
Si les deux plans directeurs Π et Π' sont distincts, nous avons vu à la leçon précédente que l'intersection $\Pi\cap\Pi'$ est une droite vectorielle Δ, c'est à dire un sous-espace vectoriel de E_3 de dimension un. Alors l'intersection $P\cap P'$ est une droite affine D dirigée par la droite vectorielle Δ.

- Intersection d'une droite affine et d'un plan affine dans l'espace de dimension trois

On se donne un plan affine P dirigé par le plan vectoriel Π et une droite affine D dirigée par la droite vectorielle Δ.
Si la droite vectorielle Δ est incluse dans le plan vectoriel Π, la droite D est parallèle au plan affine P. Alors ou bien l'intersection $D\cap P$ est vide, ou bien la droite D est une droite affine incluse dans le plan P et $D\cap P=D$.
Si la droite vectorielle Δ n'est pas incluse dans le plan vectoriel Π, l'intersection $D\cap P$ est composée d'un unique point I.

- Intersection de deux droites affines dans l'espace de dimension trois

On se donne les droites affines $D=A+<u>$ et $D'=A'+<u'>$.
Si la famille de trois vecteurs $(u,u',\overrightarrow{AA'})$ est liée, les deux droites D et D' sont coplanaires ; leur intersection a été étudiée lors de la toute première leçon : droites concourrantes ou parallèles dans le plan.
Si la famille $(u,u',\overrightarrow{AA'})$ est libre, les droites ne sont pas coplanaires et leur intersection est vide.

- Structure euclidienne dans un espace vectoriel

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ (de dimension quelconque, éventuellement égale à trois pour fixer les idées). Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace E: c'est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs $(x, y) \in E \times E$ associe le nombre réel $x \cdot y$ le plus souvent noté $(x\,, y)$. Elle est linéaire à gauche : $(\alpha x + \beta x'\,, y) = \alpha\,(x\,, y) + \beta\,(x'\,, y)$ pour tout vecteur x, x' et y de E et tous les nombres α et β. Elle est linéaire à droite : $(x\,, \alpha y + \beta y') = \alpha\,(x\,, y) + \beta\,(x\,, y')$ pour tous les vecteurs x, y et y' de E et des nombres α et β arbitraires. Elle est symétrique : pour tout x et y vecteurs de E, $(y\,, x) = (x\,, y)$. Elle est positive : $(x\,, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Enfin, elle est définie : si $(x\,, x) = 0$, alors $x = 0$.

Par exemple, le produit scalaire “canonique” dans $\mathbb{R}^3$ est défini par $(x, y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,z_3$ si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

- Norme

Si x est un vecteur de E, le produit scalaire de x par lui-même est toujours positif ou nul. Par définition, la norme de x est la racine carrée du produit scalaire $(x\,, x)$: $\|x\| = \sqrt{(x\,, x)}$. C'est un nombre positif par définition du symbole de la racine carrée.

- Vecteurs orthogonaux

On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque le produit scalaire $(x\,, y)$ est nul. On a alors le théorème de Pythagore : si $(x\,, y) = 0$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si x et y sont deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel euclidien E, on a toujours $|(x\,, y)| \leq \|x\|\,\|y\|$. Ceci permet, si x et y ne sont pas nuls, d'introduire l'angle $\theta \in [0, \pi]$ des deux vecteurs *via* la relation $\cos\theta = \frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$. Dans le cas d'égalité, c'est à dire $|(x\,, y)| = \|x\|\,\|y\|$, les vecteurs x et y sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire

Pour x et y deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel euclidien E, on a $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- Base orthogonale, base orthonormée

Une base $(e_1, \cdots e_n)$ de l'espace vectoriel euclidien E est orthogonale si et seulement si tous les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux : $(e_i\,, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Elle est orthonormée si de plus tous les vecteurs e_i sont unitaires, c'est à dire de norme unité : $\|e_i\| = 1$ pour tout i entre 1 et n.

- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

On se place pour fixer les idées dans l'espace euclidien E_3 de dimension trois. On se donne une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E. On peut la transformer en une base orthogonale (e_1, e_2, e_3) en suivant l'algorithme suivant. On pose tout d'abord $e_1 = \varepsilon_1$. Puis on cherche e_2 sous la forme $e_2 = \varepsilon_2 + \theta\,e_1$ et on détermine θ de sorte que $(e_1\,, e_2) = 0$. Enfin, on pose $e_3 = \varepsilon_3 + \alpha e_1 + \beta\,e_2$ et on règle les valeurs des coefficients α et β pour que $(e_3\,, e_1) = (e_3\,, e_2) = 0$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt se poursuit pour les dimensions supérieures [exercice !].

• Espace affine euclidien de dimension trois

Un espace affine $\mathscr{E}_3$ dirigé par l'espace vectoriel E_3 est dit euclidien si un produit scalaire a été défini sur E_3, c'est à dire si E_3 est lui-même euclidien. On dispose alors de la distance entre deux points : si A et B sont deux points de $\mathscr{E}_3$, on pose $\mathrm{d}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. On note le plus souvent cette distance AB lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Toutes les propriétés de la norme peuvent s'écrire pour la distance entre les points de $\mathscr{E}_3$; c'est un exercice laissé au lecteur.

Exercices

• Un plan et une droite

On se donne les points A, B et C de l'espace affine de dimension trois par leurs coordonnées dans un repère affine : $A(-1, 6, 7)$, $B(2, 5, 8)$, $C(-3, 4, 0)$.

a) Vérifier que les trois points A, B, C ne sont pas alignés. On appelle $P = (ABC)$ le plan affine qui contient ces trois points.

b) Déterminer les équations paramétriques du plan P.

c) Quelle est l'équation cartésienne du plan P ?

d) Vérifier que les trois points A, B et C ont des coordonnées qui satisfont effectivement léquation trouvée à la question précédente.

On se donne la droite affine D par ses équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1-t \\ 2t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

e) Préciser les coordonnées d'un point de D ainsi qu'un vecteur directeur.

f) La droite D est-elle parallèle au plan P ?

g) Déterminer l'intersection de la droite D et du plan P.

$9x + 19y - 8z = 49$; $[(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)]$.

• Deux droites

On se donne la droite D_1 par des équations cartésiennes : $x - 3 = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+9}{5}$ et la droite D_2 par la représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+3s \\ 10+5s \\ -10-6s \end{pmatrix}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

a) Préciser les coordonnées d'un point de D_1 ainsi qu'un vecteur directeur.

b) Même question pour la droite D_2.

c) Prouver que les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

d) Montrer que D_1 et D_2 sont coucourantes.

e) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection. $[(4, 5, -4)]$.