le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 7 — Produit mixte et produit vectoriel

- Distance entre deux points

On se donne un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ et deux points A et B dans ce repère, de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B). La distance $d(A, B)$ entre les points A et B est par définition la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Distance d'un point à un plan

On se donne un repère orthonormé de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$, un triplet $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ de nombres réels et un réel d. On note P le plan d'équation $a x + b y + c z + d = 0$ et u le vecteur de l'espace vectoriel E_3 de coordonnées (a, b, c). Le vecteur u est orthogonal au plan P: le produit scalaire de u par un vecteur arbitraire du plan directeur de P d'équation $a x + b y + c z = 0$ est toujours nul.
On se donne maintenant un point arbitraire $Q \in \mathscr{E}_3$ de coordonnées (X, Y, Z). La droite passant par Q et normale (ou orthogonale) au plan P coupe ce plan en un unique point I. Alors, pour tout point $M \in P$, la distance QM est toujours supérieure ou égale à la distance QI: $\mathrm{d}(Q, M) \geq \mathrm{d}(Q, I)$. Cette distance minimale est appelée distance du point Q au plan P et elle est notée $\mathrm{d}(Q, P)$. Avec les notations introduites plus haut, $\mathrm{d}(Q, P) = \frac{|aX+bY+cZ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
La preuve de cette propriété consiste à rechercher le point d'intersection I entre la droite D orthogonale au plan P contenant le point Q et le plan P lui-même. Si on note x, y et z les coordonnées de ce point, on a d'une part la représentation paramétrique de la droite D dirigée par le vecteur normal n de coordonnées (a, b, c): $I = Q + t\, n$, c'est à dire pour les coordonnées $x = X + t\, a$, $y = Y + t\, b$ et $z = Z + t\, c$, pour un certain $t \in \mathbb{R}$. De plus, les coordonnées x, y et z satisfont l'équation du plan P: $a x + b y + c z = 0$. On en déduit
$a\,(X + t\, a) + b\,(Y + t\, b) + c\,(Z + t\, c) + d = 0$, c'est à dire $aX + bY + cZ + d + t\,(a^2 + b^2 + c^2) = 0$.
Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'existence et l'unicité du nombre t découle de la relation précédente. On a ensuite la relation $\|\overrightarrow{QI}\| = |t|\, \|n\| = \frac{|aX+bY+cZ+d|}{a^2+b^2+c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|aX+bY+cZ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Si M est maintenant un point arbitraire du plan P, le triangle QIM est rectangle en I, le théorème de Pythagore s'écrit $\|\overrightarrow{QM}\|^2 = \|\overrightarrow{QI}\|^2 + \|\overrightarrow{IM}\|^2$ et on en déduit $\|\overrightarrow{QM}\|^2 \geq \|\overrightarrow{QI}\|^2$ donc $\|\overrightarrow{QM}\| \geq \|\overrightarrow{QI}\|$ et la distance de Q à un point arbitraire du plan P est toujours supérieure ou égale à la distance entre les points Q et I. La propriété est démontrée. $\square$

François Dubois, mars 2022.

- Projection orthogonale sur un plan affine

On note ΠQ le point I introduit ci-dessus, intersection du plan P avec la droite normale à P passant par le point Q. Par définition, ΠQ est le projeté orthogonal de Q sur le plan P. Les vecteurs $\overrightarrow{Q\Pi Q}$ et $\overrightarrow{M\Pi Q}$ sont orthogonaux, quel que soit le point M du plan P.

- Changement de base orthonormée

On se donne deux bases orthonormées (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de l'espace vectoriel euclidien E_3. On note R la matrice de passage entre ces deux bases : $\varepsilon_i = \sum_k R_{ki}\, e_k$ et R^{t} sa matrice transposée. Alors la matrice R satisfait à la relation $R R^{\mathrm{t}} = R^{\mathrm{t}} R = \mathrm{I}$. L'inverse de la matice R est égale à sa transposée ; une telle matrice est dite "orthogonale".

Par exemple, les matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

On constate que $\det R_\theta = +1$ et $\det R_s = -1$.

De façon générale, le déterminant d'une matrice orthogonale est toujours de carré égal à l'unité. Si $\det R = +1$, on dit que les bases (e_i) et (ε_j) sont de même orientation. Si $\det R = -1$, les bases (e_i) et (ε_j) sont d'orientations différentes.

- Base orthonormée directe

On se donne par convention une base orthonormée de référence qui vérifie la "règle des trois doigts" (ou règle du tire-bouchon, ou règle du bonhomme d'Ampère) : la base représentée (dans cet ordre !) par l'index, le majeur et le pouce d'une main droite forme une base de référence qui est directe par convention.

Par définition, une base orthonormée directe est de même orientation que la base orthonormée de référence. La matrice orthogonale de passage entre la base orthonormée de référence et une base orthonormée directe a un déterminant toujours égal à $+1$.

- Espace vectoriel euclidien de dimension trois orienté

Lorsqu'une base orthonormée directe de référence a été choisie dans un espace vectoriel euclidien de dimension trois, l'espace est dit orienté.

- Condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de trois vecteurs soit une base

On se donne une base quelconque (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel E_3 et (u, v, w) une famille de trois vecteurs de E_3. On décompose ces trois vecteurs dans la base (e_1, e_2, e_3) :
$u = \sum_{j=1}^3 u_j\, e_j$, $v = \sum_{k=1}^3 v_k\, e_k$ et $w = \sum_{\ell=1}^3 w_\ell\, e_\ell$. Alors la famille (u, v, w) est une base de E_3 si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$ est non nul.

- Produit mixte de trois vecteurs dans un espace euclidien de dimension trois orienté

On se donne une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois orienté E_3 et trois vecteurs (u, v, w) définis par leurs coordonnées : $u = \sum_{j=1}^3 u_j\, e_j$, $v = \sum_{k=1}^3 v_k\, e_k$ et $w = \sum_{\ell=1}^3 w_\ell\, e_\ell$. Alors le déterminant $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$ ne dépend pas de la base

orthonormée directe choisie. C'est par définition le produit mixte de la famille de trois vecteurs u, v, w ; on le note (u, v, w).
Quand on échange deux vecteurs, on change le signe du produit mixte. Ainsi,
$(v, u, w) = -(u, v, w)$, $(w, v, u) = -(u, v, w)$ et $(u, w, v) = -(u, v, w)$. Le produit mixte est invariant par permutation circulaire des trois vecteurs : $(v, w, u) = (w, u, v) = (u, v, w)$.
Les trois vecteurs de la famille u, v, w sont linéairement indépendants si et seulement si le produit mixte (u, v, w) est non nul.
On note $H(u, v, w)$ l'hexaèdre engendré par les trois vecteurs u, v, w:
$H(u, v, w) = \{x \in E_3, \exists\, \theta, \xi, \zeta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1, x = \theta\, u + \xi\, v + \zeta\, w\}$.
Alors le volume de l'hexaèdre $H(u, v, w)$ est égal à la valeur absolue du produit mixte (u, v, w):
$\mathrm{vol}\,(H(u, v, w)) = |(u, v, w)|$.

- Tenseur antisymétrique d'ordre trois

On peut écrire les résultats précédents à l'aide du tenseur antisymétrique d'ordre trois ε_{ijk} pour $i,\ j,\ k$ paramètres entiers entre 1 et 3.
Rappelons qu'un existe en tout et pour tout $6 = 3!$ permutations des entiers $(1,2,3)$: trois transpositions : $(1,2,3) \longmapsto (2,1,3)$, $(1,2,3) \longmapsto (3,2,1)$, $(1,2,3) \longmapsto (1,3,2)$ et trois permutations circulaires : $(1,2,3) \longmapsto (1,2,3)$, $(1,2,3) \longmapsto (2,3,1)$, $(1,2,3) \longmapsto (3,1,2)$.
Par définition, pour $i,\ j,\ k$ entiers entre 1 et 3, $\varepsilon_{ijk} = 1$ si (i,j,k) est une permutation circulaire des entiers $(1,2,3)$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ si (i,j,k) est une transposition des entiers $(1,2,3)$ et $\varepsilon_{ijk} = 0$ dans les autres cas où (i,j,k) n'est pas une permutation des entiers $(1,2,3)$.
Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois orienté E_3, on a la relation $\varepsilon_{jk\ell} = (e_i, e_j, e_k)$. Enfin, si u, v, w désignent trois vecteurs définis par leurs coordonnées, c'est à dire $u = \sum_{j=1}^{3} u_j\, e_j$, $v = \sum_{k=1}^{3} v_k\, e_k$ et $w = \sum_{\ell=1}^{3} w_\ell\, e_\ell$, on a l'expression suivante du produit mixte : $(u, v, w) = \sum_{1 \leq j,k,\ell \leq 3} \varepsilon_{jk\ell}\ u_j\, v_k\, w_\ell$.

- Produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois

On se donne un espace vectoriel euclidien E_3 de dimension trois orienté et deux vecteurs u et v dans cet espace. Le produit vectoriel $u \times v$ est l'unique vecteur de E_3 tel que le produit scalaire de $u \times v$ par un vecteur $w \in E_3$ arbitraire est égal au produit mixte (u, v, w):
$(u \times v\,, w) = (u, v, w)\,, \forall\, w \in E_3$.
Le vecteur $u \times v$ est orthogonal aux vecteurs u et v. Si les vecteurs u et v sont colinéaires, le produit vectoriel $u \times v$ est nul.
On note $P(u, v)$ le parallélogramme engendré par les vecteurs u et v:
$P(u, v) = \{x \in E_3, \exists\, \theta, \xi,\ 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1,\ x = \theta\, u + \xi\, v\}$. Alors la surface de ce parallélogramme est égale à la norme du produit vectoriel $u \times v$: $\mathrm{surf}\,(P(u, v)) = \|u \times v\|$. De plus, $\|u \times v\| \leq \|u\|\,\|v\|$.
On se donne une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) et les composantes des deux vecteurs u et v: $u = \sum_{j=1}^{3} u_j\, e_j$ et $v = \sum_{k=1}^{3} v_k\, e_k$. Le produit vectoriel $u \times v$ s'exprime dans la base (e_1, e_2, e_3) *via* la relation : $u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3 + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} e_2.$

On peut écrire aussi formellement $u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$ et $u \times v = \sum_{1 \leq j,k,\ell \leq 3} \varepsilon_{jk\ell}\, u_j\, v_k\, e_\ell$.

On peut démontrer que $w = u \times v$ est une fonction bilinéaire des vecteurs u et v : $(\alpha\, u + \beta\, u') \times v = \alpha\,(u \times v) + \beta\,(u' \times v)$ et $u \times (\alpha\, v + \beta\, v') = \alpha\,(u \times v) + \beta\,(u \times v')$, ce quel que soit le choix des vecteurs u, u', v, v' et quel que soit le choix des nombres α et β. C'est un exercice facile à partir de l'expression en fonction des coordonnées donnée quelques lignes plus haut.

Si $u \times v \neq 0$, la famille $(u, v, u \times v)$ est une base directe de E_3 : la matrice de changement de base entre une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) et la famille $(u, v, u \times v)$ est strictement positif.

Attention, le produit vectoriel n'est pas associatif : en général, $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$.

• Expression du produit vectoriel à l'aide du tenseur antisymétrique d'ordre trois

On se donne un espace vectoriel euclidien E_3 de dimension trois orienté, une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) et deux vecteurs $u = \sum_{j=1}^{3} u_j\, e_j$ et $v = \sum_{k=1}^{3} v_k\, e_k$. On décompose le produit vectoriel $u \times v$ dans cette base : $u \times v = \sum_{i=1}^{3} (u \times v)_i\, e_i$. Alors les composantes $(u \times v)_i$ de ce produit vectoriel s'expriment facilement à l'aide du tenseur antisymétrique d'ordre trois ε_{ijk} : $(u \times v)_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, u_j\, v_k$.

Exercices

• Calcul d'un produit vectoriel

On se donne une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel euclidien orienté E_3.

a) Montrer que l'on a les relations suivantes : $e_1 \times e_1 = 0$, $e_2 \times e_2 = 0$ et $e_3 \times e_3 = 0$.

b) Montrer que l'on a les relations suivantes : $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ et $e_3 \times e_1 = e_2$.

c) Montrer enfin les relations : $e_2 \times e_1 = -e_3$, $e_3 \times e_2 = -e_1$ et $e_1 \times e_3 = -e_2$.

On se donne deux vecteurs arbitraires u et v de l'espace E_3 :
$u = u_1\, e_1 + u_2\, e_2 + u_3\, e_3$, $v = v_1\, e_1 + v_2\, e_2 + v_3\, e_3$.

d) Calculer les composantes du produit vectoriel $u \times v$ dans la base (e_1, e_2, e_3) en fonction de $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$.

• Double produit vectoriel

Si a, b, c sont trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension trois orienté, montrer que l'on a on a la relation $a \times (b \times c) = (a\,,c)\, b - (a\,,b)\, c$.

• Introduction aux coordonnées polaires de l'espace $\mathcal{E}_3$

On se donne un repère affine orthonormé direct $(\mathrm{O}; e_1, e_2, e_3)$ de l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}_3$ de dimension trois et un point M de coordonnées (x, y, z) dans ce repère et différent de l'origine. On note $m\,(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M dans le plan $x\mathrm{O}y$. On pose $\rho = \mathrm{d}(\mathrm{O}, M)$ et $r = \mathrm{d}(\mathrm{O}, m)$. On introduit l'angle θ entre l'axe $\mathrm{O}z$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ et l'angle φ entre l'axe $\mathrm{O}x$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}m}$.

a) Montrer que l'on a $r = \rho\, \sin\theta$.

b) En déduire les expressions des coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction des coordonnées polaires ρ, θ et φ: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$.
On pose $e_r = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$.
c) Calculer les coordonnées de e_φ défini par $e_\varphi = e_3 \times e_r$.
d) Montrer que la famille de vecteurs (e_r, e_φ, e_3) est une base orthonormée directe.
e) On pose $e_\rho = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{OM}$. Montrer que ce vecteur est unitaire et calculer ses coordonnées dans la base orthonormée (e_r, e_φ, e_3).
f) Calculer les coordonnées du vecteur e_θ défini par $e_\theta = e_\varphi \times e_\rho$ dans la base (e_r, e_φ, e_3).
g) Montrer que la famille $(e_\rho, e_\theta, e_\varphi)$ est une base orthonormée directe de l'espace E_3.
h) Calculer les coordonnées du vecteur e_θ dans la base (e_1, e_2, e_3).

- Inégalité de Hadamard

On se donne trois vecteurs u, v, w dans l'espace vectoriel euclidien orienté E_3 de dimension trois. Démontrer que $|(u, v, w)| \leq \|u\|\,\|v\|\,\|w\|$.

- Identité de Lagrange

On se donne deux vecteurs u et v dans l'espace vectoriel euclidien orienté E_3 de dimension trois.
a) Rappeler comment on peut introduire l'angle θ des deux vecteurs u et v dans l'expression du produit scalaire (u, v).
b) Comment peut-on introduire l'angle θ des deux vecteurs u et v dans l'expression du produit vectoriel $u \times v$?
c) A l'aide des résultats des deux questions précédentes, montrer l'identité de Lagrange
$(u, v)^2 + \|u \times v\|^2 = \|u\|^2\,\|v\|^2$.
d) Si on décompose les vecteurs u et v dans une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3), avec $u = \sum_{j=1}^3 u_j e_j$ et $v = \sum_{k=1}^3 v_k e_k$, montrer que l'identité de Lagrange peut s'écrire sous forme algébrique

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 = \\ = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\,(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

e) Démontrer directement que pour tous les réels u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, on a l'identité

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 = \\ = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\,(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$