

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 8

Courbes planes paramétrées

- Introduction

On suppose connu du lecteur l'étude générale des fonctions à une variable $x \mapsto f(x)$: tableau des variations, étude locale, branches infinies, représentation graphique.

Mais cette approche ne suffit pas pour dessiner un simple cercle, par exemple de centre l'origine et de rayon unité. Avec l'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ par exemple, on ne dispose que d'un demi-cercle. Par contre, une représentation avec deux fonctions, comme $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ permet la paramétrisation complète du cercle unité.

Dans ce chapitre, nous adaptons les méthodes valables pour les courbes de la forme “ $y = f(x)$ ” aux courbes paramétrées. Une courbe paramétrée Γ du plan euclidien \mathbb{R}^2 est un ensemble de points $M(t)$ de coordonnées (x, y) représentées par deux fonctions X et Y , de la forme $(x, y) = (X(t), Y(t))$. On suppose que les fonctions X et Y sont aussi dérivables que nécessaire. Noter que cette dernière hypothèse est une restriction dont il faut avoir conscience.

Un cas important de courbes paramétrées est celui où il existe une fonction $t \mapsto \rho(t)$ de sorte que les fonctions X et Y peuvent s'écrire $X(t) = \rho(t) \cos t$ et $Y(t) = \rho(t) \sin t$. On parle alors de “courbes en coordonnées polaires” ; il est traité au chapitre suivant.

- Réduction de l'intervalle d'étude

Lorsque les fonctions X et Y sont définies sur \mathbb{R} tout entier pour fixer les idées, on n'a pas forcément besoin de les étudier sur tout leur intervalle de définition. Des transformations géométriques simples permettent de réduire l'étape d'étude de fonctions. Nous traitons cette question sur l'exemple d'une courbe de Lissajous, définie par les relations $x = X(t) = \cos(3t)$ et $y(t) = Y(t) = \sin(2t)$.

Tout d'abord, on remarque que les fonctions X et Y sont périodiques de période 2π :

$X(t+2\pi) = X(t)$ et $Y(t+2\pi) = Y(t)$. On suppose par exemple $t \in [-\pi, \pi]$. Maintenant, on remarque que X est paire alors que Y est impaire : dans la transformation $t \mapsto -t$, le point $M(x = X(t), y = Y(t))$ se transforme en un point M' de coordonnées (x', y') telles que $x' = X(-t) = x$ et $y' = Y(-t) = -y$. Il s'agit de la symétrie orthogonale s par rapport à l'axe des abscisses : $s(x, y) = (x, -y)$. On se contente donc d'étudier les fonctions X et Y dans l'intervalle $[0, \pi]$ et on effectue cette symétrie sur le premier arc de courbe obtenu.

Dans le cas de cette courbe de Lissajous, la réduction de l'intervalle d'étude ne s'arrête pas là ! On remarque que dans la transformation $t \mapsto \pi - t$, le point $M(x = X(t), y = Y(t))$ se transforme en un point M'' de coordonnées (x'', y'') telles que $x'' = X(\pi - t) = -x$ et

$y'' = Y(\pi - t) = -y$. On passe de M à M'' grâce à la symétrie centrale σ par rapport à l'origine : $\sigma(x, y) = (-x, -y)$.

On étudie ensuite les fonctions $t \mapsto X(t) = \cos(3t)$ et $t \mapsto Y(t) = \sin(2t)$ seulement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Après une étude élémentaire, on a le tableau de variations simultanées suivant.

t	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\searrow -1/\sqrt{2}$	$\searrow -1$	$\nearrow 0$
y	0	$\nearrow 1$	$\searrow \sqrt{3}/2$	$\searrow 0$

La tangente au point $X(\pi/2) = Y(\pi/2) = 0$ s'obtient par un simple calcul des nombres dérivés : $X'(\pi/2) = 3$ et $Y'(\pi/2) = -2$ d'où une pente de $-2/3$ en ce point.

On effectue ensuite la symétrie centrale sur l'arc de courbe obtenu à l'issue de la première étape. Puis on applique la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Ce processus est illustré avec les trois graphiques de la Figure 1.

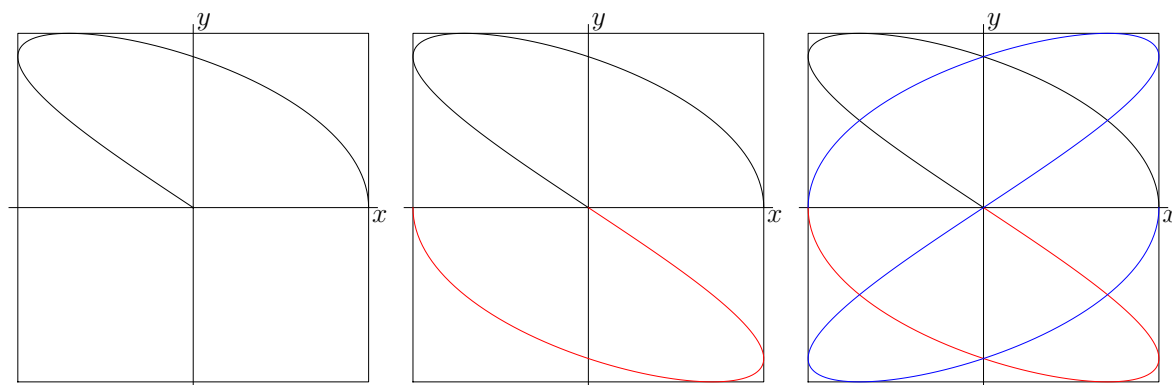


Figure 1: Courbe de Lissajous ; début de la représentation graphique (à gauche), après la symétrie centrale (au centre) et après la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses (à droite)

- Formule de Taylor

On se donne un point $t_0 \in \mathbb{R}$, un nombre $\alpha > 0$, un intervalle fixé $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ et une application f définie de $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On dit aussi que la fonction f est définie "au voisinage" du réel t_0 . On suppose cette fonction assez régulière, quatre fois continuellement dérivable pour les applications dans ce chapitre.

On peut montrer (voir le cours d'Analyse) qu'alors la fonction f est "proche" d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 : $f(t) \simeq P(t)$, avec

$P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4$. On écrit cette propriété avec la notation de Landau :

$$f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + O((t - t_0)^5),$$

où $O((t - t_0)^n)$ est une notation générique pour une fonction ε "de l'ordre de $(t - t_0)^n$ " : il existe une constante positive C de sorte que pour tout $t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, $|\varepsilon(t)| \leq C|t - t_0|^n$.

On peut dériver la relation

$f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + O((t - t_0)^5)$, à condition de diminuer d'une unité à chaque fois l'ordre de précision du reste :

$$f'(t) = a_1 + 2a_2(t - t_0) + 3a_3(t - t_0)^2 + 4a_4(t - t_0)^3 + O((t - t_0)^4),$$

$$f''(t) = 2a_2 + 6a_3(t - t_0) + 12a_4(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3),$$

$f'''(t) = 6a_3 + 24a_4(t - t_0) + O((t - t_0)^2)$ et $f^{(4)}(t) = 24a_4 + O((t - t_0))$. En prenant $t = t_0$ dans les relations précédentes, il vient : $a_0 = f(t_0)$, $a_1 = f'(t_0)$, $a_2 = \frac{1}{2} f''(t_0)$, $a_3 = \frac{1}{6} f'''(t_0)$, $a_4 = \frac{1}{24} f^{(4)}(t_0)$ et de façon très générale, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t_0)$. La formule de Taylor à l'ordre quatre s'écrit finalement :

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} f''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(t_0)(t - t_0)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(t_0)(t - t_0)^4 + O((t - t_0)^5).$$

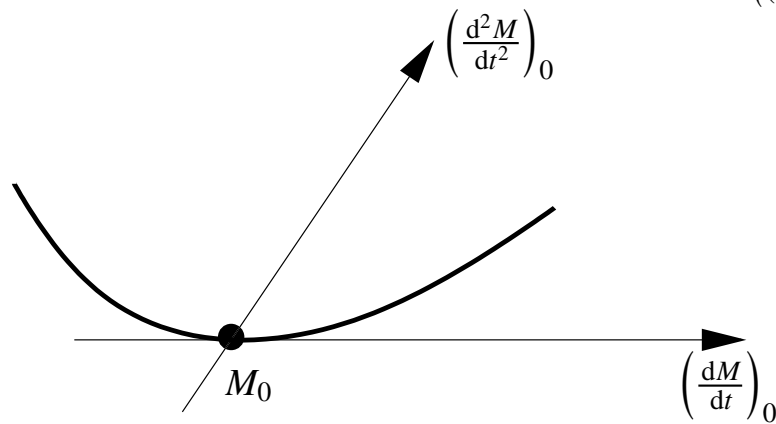


Figure 2: Point régulier ordinaire

- Etude locale : point régulier ordinaire

On se donne $t_0 \in \mathbb{R}$, une courbe paramétrée Γ définie au voisinage de $M_0 = M(t_0)$. On note $(\frac{dM}{dr})_0$ le vecteur des dérivées premières des fonctions X et Y au point t_0 :

$(\frac{dM}{dr})_0 = (\frac{dX}{dr}(t_0), \frac{dY}{dr}(t_0))$ et $(\frac{d^2M}{dr^2})_0 = (\frac{d^2X}{dr^2}(t_0), \frac{d^2Y}{dr^2}(t_0))$ celui des dérivées secondes au point de référence. On suppose que le paramètre t est voisin de t_0 : $t = t_0 + \theta$, où θ est une variable

“très petite” puisque nous nous intéressons à ce qui se passe si θ tend vers zéro. On développe les deux fonctions X et Y qui définissent le point $M(t)$ au voisinage de t_0 et on obtient à l'ordre deux : $M(t_0 + \theta) = M_0 + \theta (\frac{dM}{dr})_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dr^2})_0 + O(\theta^3)$.

On dit que le point M_0 est régulier si le vecteur $(\frac{dM}{dr})_0$ est non nul. De plus, le point M_0 est régulier “ordinaire” si les deux vecteurs $(\frac{dM}{dr})_0$ et $(\frac{d^2M}{dr^2})_0$ sont linéairement indépendants. On fait cette hypothèse dans la suite de ce paragraphe.

On prend comme repère affine du plan d'une part le point de référence M_0 et d'autre part la base (*a priori* non orthogonale !) $((\frac{dM}{dr})_0, (\frac{d^2M}{dr^2})_0)$. Alors tout point M du plan a des coordonnées ξ et η dans ce repère : $M = M_0 + \xi (\frac{dM}{dr})_0 + \eta (\frac{d^2M}{dr^2})_0$. En particulier les points $M(t_0 + \theta)$ de la courbe Γ ont des coordonnées que l'on peut noter $\xi(\theta)$ et $\eta(\theta)$.

Quand on rapproche les relations $M(t_0 + \theta) = M_0 + \theta (\frac{dM}{dr})_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dr^2})_0 + O(\theta^3)$ et

$M(t_0 + \theta) = M_0 + \xi(\theta) (\frac{dM}{dr})_0 + \eta(\theta) (\frac{d^2M}{dr^2})_0$, il vient en identifiant les coordonnées dans la base $((\frac{dM}{dr})_0, (\frac{d^2M}{dr^2})_0)$: $\xi(\theta) = \theta + O(\theta^3)$ et $\eta(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3)$.

Comme $\eta(\theta)$ est positif au voisinage de $\theta = 0$, la courbe est localement d'un seul côté de sa tangente ; le point M_0 est un point régulier ordinaire.

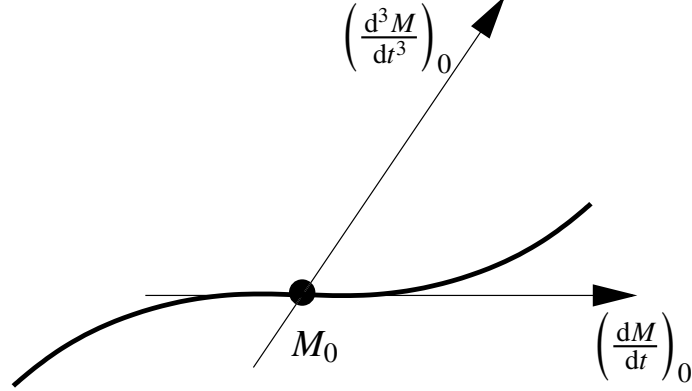


Figure 3: Point régulier avec une inflexion

- Etude locale : point régulier avec une inflexion

On reprend les notations du paragraphe précédent. On suppose toujours le point M_0 régulier : $(\frac{dM}{dt})_0 \neq 0$. On suppose maintenant que la famille des deux vecteurs $((\frac{dM}{dt})_0, (\frac{d^2M}{dt^2})_0)$ est liée : le vecteur $(\frac{d^2M}{dt^2})_0$ peut donc s'exprimer en fonction de $(\frac{dM}{dt})_0$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $(\frac{d^2M}{dt^2})_0 = \alpha (\frac{dM}{dt})_0$. On ne peut pas refaire le raisonnement précédent car on ne dispose plus *a priori* de base locale bien adaptée à la courbe Γ au voisinage du point M_0 . On pousse donc le développement de Taylor un cran plus loin :

$M(t_0 + \theta) = M_0 + \theta (\frac{dM}{dt})_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dt^2})_0 + \frac{\theta^3}{6} (\frac{d^3M}{dt^3})_0 + O(\theta^4)$. Compte tenu de la condition

$(\frac{d^2M}{dt^2})_0 = \alpha (\frac{dM}{dt})_0$, on peut écrire aussi :

$$M(t_0 + \theta) = M_0 + \theta [1 + \alpha \frac{\theta}{2}] (\frac{dM}{dt})_0 + \frac{\theta^3}{6} (\frac{d^3M}{dt^3})_0 + O(\theta^4).$$

Afin d'extraire de l'information de ce développement, on suppose maintenant que les deux vecteurs $(\frac{dM}{dt})_0$ et $(\frac{d^3M}{dt^3})_0$ sont linéairement indépendants. On se place dans le repère affine $(M_0; (\frac{dM}{dt})_0, (\frac{d^3M}{dt^3})_0)$ et on introduit les coordonnées (encore notées ξ et η) d'un point arbitraire M dans ce repère : $M = M_0 + \xi (\frac{dM}{dt})_0 + \eta (\frac{d^3M}{dt^3})_0$. Alors pour un point de la courbe Γ , on a $\xi(\theta) = \theta + \alpha \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$ et $\eta(\theta) = \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^4)$.

Lorsque θ change de signe au voisinage de zéro, les deux coordonnées $\xi(\theta)$ et $\eta(\theta)$ changent de signe ; la courbe traverse sa tangente. On dit que le point régulier M_0 est un point d'inflexion.

- Point singulier ; rebroussement de première espèce

Avec les notations des paragraphes précédents, on suppose maintenant que le vecteur dérivé $(\frac{dM}{dt})_0$ est nul. Le point M_0 est un point singulier de la courbe Γ . On suppose que le développement du point de la courbe $M(t_0 + \theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ peut être mené jusqu'à l'ordre trois. Compte tenu de l'hypothèse $(\frac{dM}{dt})_0 = 0$, il vient

$M(t_0 + \theta) = M_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dt^2})_0 + \frac{\theta^3}{6} (\frac{d^3M}{dt^3})_0 + O(\theta^4)$. On suppose dans ce paragraphe que les deux premiers vecteurs $(\frac{d^2M}{dt^2})_0$ et $(\frac{d^3M}{dt^3})_0$ qui apparaissent dans ce développement sont non nuls et

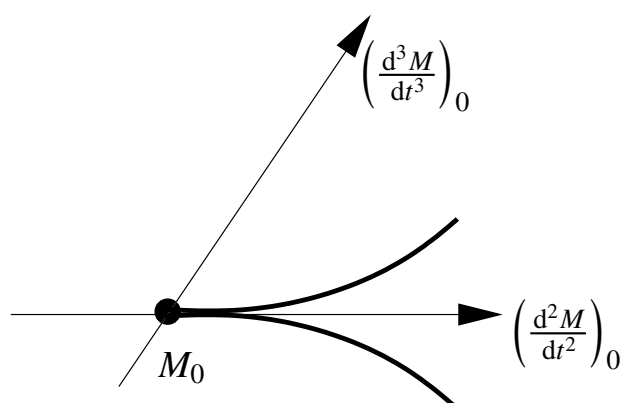


Figure 4: Point de rebroussement de première espèce

forment un système libre. On peut donc introduire le repère affine $(M_0; (\frac{d^2M}{dr^2})_0, (\frac{d^3M}{dr^3})_0)$ et les coordonnées ξ et η d'un point arbitraire du plan dans ce repère :

$M = M_0 + \xi (\frac{d^2M}{dr^2})_0 + \eta (\frac{d^3M}{dr^3})_0$. On compare cette dernière relation et le développement de Taylor d'un point de la courbe $M(t_0 + \theta) = M_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dr^2})_0 + \frac{\theta^3}{6} (\frac{d^3M}{dr^3})_0 + O(\theta^4)$. On en déduit $\xi(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$ et $\eta(\theta) = \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^4)$. La coordonnée $\xi(\theta)$ le long du vecteur tangent $(\frac{d^2M}{dr^2})_0$ reste positive si θ est assez petit : la courbe Γ rebrousse chemin au point M_0 . De plus, l'autre coordonnée $\eta(\theta)$ change de signe si θ change de signe au voisinage de zéro donc la courbe traverse sa tangente. On dit que le point singulier M_0 est un point de rebroussement de première espèce.

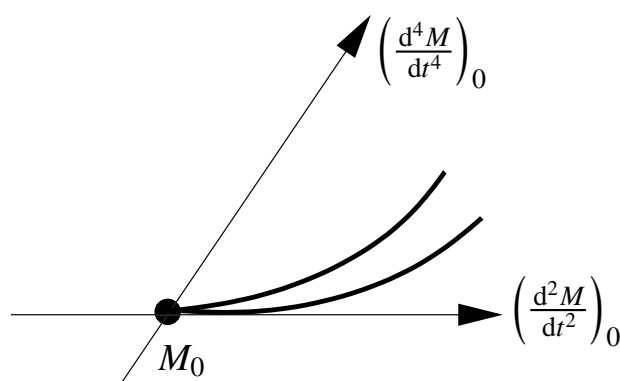


Figure 5: Point de rebroussement de seconde espèce

- Point singulier ; rebroussement de seconde espèce

On suppose toujours que M_0 est singulier : $(\frac{dM}{dr})_0 = 0$ on suppose aussi que le vecteur dérivé qui le suit dans le développement de Taylor est non nul : $(\frac{d^2M}{dr^2})_0 \neq 0$. Contrairement au paragraphe précédent, on suppose que le vecteur $(\frac{d^3M}{dr^3})_0$ des dérivés troisièmes est lié au vecteur $(\frac{d^2M}{dr^2})_0$ des dérivés secondes : il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $(\frac{d^3M}{dr^3})_0 = \beta (\frac{d^2M}{dr^2})_0$. On pousse au quatrième ordre le développement de Taylor pour les points de la courbe $M(t_0 + \theta)$ voisins de M_0 : $M(t_0 + \theta) = M_0 + \theta (\frac{dM}{dr})_0 + \frac{\theta^2}{2} (\frac{d^2M}{dr^2})_0 + \frac{\theta^3}{6} (\frac{d^3M}{dr^3})_0 + \frac{\theta^4}{24} (\frac{d^4M}{dr^4})_0 + O(\theta^5)$. On prend en compte les

hypothèses faites ici et il vient $M(t_0 + \theta) = M_0 + \left[\frac{\theta^2}{2} + \beta \frac{\theta^3}{6} \right] \left(\frac{d^2 M}{dt^2} \right)_0 + \frac{\theta^4}{24} \left(\frac{d^4 M}{dt^4} \right)_0 + O(\theta^5)$. On suppose que les deux premiers vecteurs de ce développement, à savoir $\left(\frac{d^2 M}{dt^2} \right)_0$ et $\left(\frac{d^4 M}{dt^4} \right)_0$ forment une famille libre et on se place dans le repère affine local approprié :

$M = M_0 + \xi \left(\frac{d^2 M}{dt^2} \right)_0 + \eta \left(\frac{d^4 M}{dt^4} \right)_0$. Le point $M(t_0 + \theta)$ a des coordonnées $(\xi(\theta), \eta(\theta))$ qui satisfont aux relations $\xi(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + \beta \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5)$ et $\eta(\theta) = \frac{\theta^4}{24} + O(\theta^5)$. Ces deux coordonnées restent positives pour θ voisin de zéro. D'une part, la courbe Γ rebrousse chemin au point M_0 et d'autre part, elle reste toujours du même côté de sa tangente. On dit que le point M_0 est un point de rebroussement de seconde espèce.

- Points singulier : étude générale

Le lecteur attentif constatera que nous n'avons mené dans les paragraphes précédents qu'une série de cas particuliers. Si on suppose les fonctions X et Y autant dérivables que de besoin, on peut compléter cette étude et la généraliser à tous les cas possibles, tout en restant dans le cadre des fonctions très régulières. Nous renvoyons par exemple au *Cours de mathématiques (tome 3 : géométrie et cinématique)* de J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudies [Dunod, Paris, 1975]. Remarquons simplement que les divers cas qu'on rencontre dans cette étude générale se ramènent aux quatre cas qualitativement différents étudiés ici : point régulier ordinaire, point d'inflexion, points de rebroussement de première et de seconde espèce.

- Branches infinies : asymptotes

Après l'étude locale menée aux paragraphes précédents, on suppose que pour t tendant vers t_0 (avec éventuellement $t_0 = +\infty$ ou $t_0 = -\infty$) l'une des deux coordonnées x ou y du point $M(t)$ tend vers l'infini : $X(t) \rightarrow +\infty$ ou $X(t) \rightarrow -\infty$ ou bien $Y(t) \rightarrow +\infty$ ou $Y(t) \rightarrow -\infty$. Dans ce premier paragraphe, on suppose simplement que l'une de ces deux fonctions tend vers l'infini et que l'autre a une limite finie.

Par exemple, $X(t) \rightarrow x_0$ et $Y(t) \rightarrow +\infty$ si t tend vers t_0 . Alors la courbe présente une asymptote d'équation $x = x_0$, parallèle à l'axe des ordonnées. Le cas où $Y(t) \rightarrow -\infty$ conduit à la même conclusion.

Si on suppose maintenant que $X(t) \rightarrow +\infty$ et $Y(t) \rightarrow y_0$ si t tend vers t_0 . La courbe Γ a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y = y_0$.

- Branches infinies : direction asymptotique

On se place dans le cas où les deux composantes $X(t)$ et $Y(t)$ tendent vers l'infini si t tend vers t_0 . On étudie alors le rapport $\frac{Y(t)}{X(t)}$ et on suppose qu'il a une limite quand $t \rightarrow t_0$. Si $\frac{Y(t)}{X(t)}$ tend vers une limite finie α si t tend vers t_0 , on dit que la droite d'équation $y = \alpha x$ est une direction asymptotique pour la courbe Γ .

On étudie ensuite la différence $z(t) = Y(t) - \alpha X(t)$ si t tend vers t_0 . Si $z(t)$ tend vers une limite finie β si t tend vers t_0 , les deux fonctions $Y(t)$ et $\alpha X(t) + \beta$ sont infiniment proches si t tend vers t_0 . La droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote à la courbe Γ .

Si $z(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers t_0 , on dit que la courbe présente une branche (de forme) parabolique dans la direction de la droite $y = \alpha x$. Enfin, si $\frac{Y(t)}{X(t)}$ tend vers l'infini si t tend vers t_0 , l'axe des y est une branche parabolique pour la courbe Γ .

- Etude d'un exemple

On se donne la courbe Γ d'équations $x(t) = X(t)$, $y(t) = Y(t)$ avec $X(t) = t - 1 + \frac{1}{2t^2}$ et $Y(t) = t + \frac{1}{t}$. Il y a deux branches infinies, d'une part pour t tendant vers l'infini et d'autre part pour t tendant vers zéro. Dans les deux cas, X et Y tendent vers l'infini. De plus, si t tend vers l'infini, le rapport $\frac{Y}{X}$ tend vers 1 et la différence $Y - 1 \cdot X = Y - X$ tend également vers 1. Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe Γ . Dans le second cas, pour t tendant vers zéro, le rapport $\frac{Y}{X}$ tend vers zéro et l'axe des abscisses est une direction asymptotique. Dans ce second cas, $Y - 0 \cdot X(t) = Y(t)$ tend vers l'infini si t tend vers zéro : la courbe Γ présente une branche parabolique selon l'axe des abscisses. Enfin, on doit distinguer le cas où t tend vers zéro par valeurs supérieures et celui où t tend vers zéro par valeurs inférieures. Dans les deux cas, $X(t)$ tend vers $+\infty$ et on constate que $Y(t)$ tend vers $+\infty$ dans le premier cas et $Y(t)$ tend vers $-\infty$ dans le second. La courbe Γ admet deux branches paraboliques selon l'axe des abscisses.

Exercices

- Une courbe paramétrée

On pose $x(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}$ et $y(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t}$ et on considère la courbe Γ paramétrée par ces deux fonctions.

- Que valent $x(-t)$ et $y(-t)$?
- En déduire que la courbe Γ admet une symétrie par rapport à une droite que l'on précisera.
- Montrer que si t tendant vers 1, la courbe Γ a pour asymptote la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$.
- Montrer que pour t tendant vers zéro, la courbe Γ admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 2$.
- Si t tend vers l'infini, la courbe Γ se rapproche de plus en plus de l'origine. Quelle est la tangente en ce point ?
- Etudier les variations conjointes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour t positif.
- Construire géométriquement l'arc de la courbe Γ obtenu pour t positif.
- Compléter cette construction géométrique lorsque t parcourt l'ensemble des nombres réels.

- Un point de rebroussement

On pose $X(t) = t - 1 + \frac{1}{2t^2}$ et $Y(t) = t + \frac{1}{t}$. On étudie la courbe Γ d'équations paramétriques $x = X(t)$ et $y = Y(t)$.

- Calculer les dérivées $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dY}{dt}$.
- Montrer qu'elles sont nulles en $t = 1$. Préciser les coordonnées du point $(x_1, y_1) = (X(1), Y(1))$ de la courbe Γ .
- Afin de connaître la tangente au point (x_1, y_1) , calculer la limite de l'expression $p(t) = \frac{Y(t) - y_1}{X(t) - x_1}$ lorsque t tend vers 1.
- Construire le graphe local de la courbe Γ pour t voisin de 1.