le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 9 — Courbes en coordonnées polaires

- Coordonnées polaires dans le plan

On se donne un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;e_1\,,e_2)$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$. Un point M arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes $x,\,y$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;e_1\,e_2)$ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x\,e_1 + y\,e_2$. Si le point M est distinct de l'origine O, la distance $r = \mathrm{O}M$ est strictement positive. On note θ l'angle entre l'axe des abscisses $(\mathrm{O},\,e_1)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M}$. Le couple $(r,\,\theta)$ désigne l'ensemble des coordonnées polaires du point $M \neq \mathrm{O}$. Le nombre r s'appelle le "rayon vecteur" du point M et θ l'angle polaire.

On a alors les relations $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ qui permettent de calculer les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires. Réciproquement, si on se donne les coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires s'obtiennent d'une part avec une somme de carrés : $r^2 = x^2 + y^2$, qui conduit à $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si on suppose le rayon vecteur positif. D'autre part, si $M \neq \mathrm{O}$, les deux nombres $\frac{x}{r}$ et $\frac{y}{r}$ ont une somme de carrés qui vaut l'unité. En conséquence, il existe un unique nombre θ défini à 2π près de sorte que $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

- Repère orthonormé local

Toujours avec l'hypothèse $M \neq \mathrm{O}$, on dispose de l'angle polaire θ de ce point. On pose $e_r(\theta) = \cos\theta\,e_1 + \sin\theta\,e_2$. Alors $e_r(\theta)$, que l'on peut écrire aussi sous la forme $e_r = \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{O}M}$ est un vecteur unitaire. On introduit ensuite un second vecteur unitaire orthogonal au premier : $e_\theta(\theta) = -\sin\theta\,e_1 + \cos\theta\,e_2$. Le triplet $(M\,;e_r\,,e_\theta)$ est un repère affine orthonormé local du plan $\mathcal{E}_2$. Il est de plus direct. Pour s'en rendre compte, on plonge l'espace dans un espace euclidien tridimensionnel et on complète la base $(e_1,\,e_2)$ par un vecteur orthonormé e_3 de sorte que la base $(e_1\,,e_2\,,e_3)$ soit orthonormée directe. On a les relations $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$ et $e_3 \times e_1 = e_2$. Alors la base $(e_r\,,e_\theta\,,e_3)$ est une base directe et on a en particulier $e_r \times e_\theta = e_3$, $e_3 \times e_r = e_\theta$ et $e_r = e_\theta \times e_3$.

Bien que les notations e_r et e_θ ne soient pas très explicites, ces deux vecteurs sont fonction uniquement de l'angle polaire θ. Ce sont même des fonctions dérivables de l'angle polaire et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}e_r = e_\theta$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}e_\theta = -e_r$.

- Courbe en coordonnées polaires

Une courbe Γ en coordonnées polaires est une courbe paramétrée par l'angle polaire θ. On se donne une fonction réelle de variable réelle $\theta \longmapsto R(\theta)$ et la "courbe en coordonnées polaires associée" est simplement la courbe paramétrée par les relations $x = R(\theta)\,\cos\theta$ et $y = R(\theta)\,\sin\theta$.

François Dubois, avril 2022.

Notons que dans cette définition, rien n'interdit à la fonction R de s'annuler ou de devenir négative ! On remarque que l'on a aussi $\overrightarrow{\mathrm{O}M}(\theta) = R(\theta)\, e_r(\theta)$. On dit que l'équation en coordonnées polaires de la courbe s'écrit $r = R(\theta)$.

- Spirale d'Archimède

Un premier exemple tout à fait spectaculaire est la spirale d'Archimède. Si on se donne $a > 0$, son équation en coordonnées polaires est simplement $r = a\,\theta$. Elle est représentée sur la figure 1.

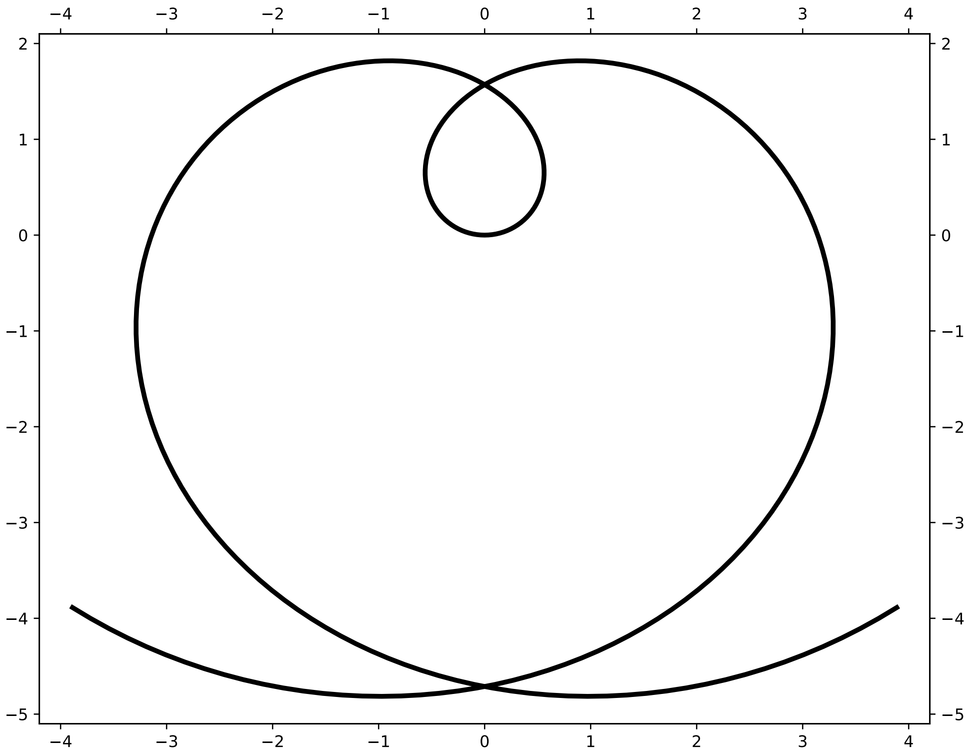

Figure 1. Spirale d'Archimède

- Réduction de l'intervalle d'étude : $\theta \longrightarrow -\theta$.

La spirale d'Archimède présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. C'est une conséquence de l'imparité de la fonction $\theta \longmapsto a\,\theta$. En effet, si $\theta \longrightarrow -\theta$, alors $r \longrightarrow -r$. Dans cette transformation, le point $M(r,\theta)$ de coordonnées polaires r et θ se transforme en un point $M'(-r,-\theta)$. Si on explicite les coordonnées cartésiennes x', y' de M', on a $x' = -x$ et $y' = y$ en fonction des coordonnées cartésiennes du point M. Le point M' est issu de M dans la symétrie par rapport à l'axe $\mathrm{O}y$.
Si au contraire la fonction $\theta \longmapsto R(\theta)$ est paire, avec les mêmes notations, le point $M'(R(\theta),-\theta)$ a des coordonnées cartésiennes qui vérifient $x' = x$ et $y' = -y$: il est issu de $M(R(\theta),\theta)$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

- Réduction de l'intervalle d'étude : $\theta \longrightarrow \theta+\pi$.

Dans cette transformation, les fonctions sinus et cosinus changent de signe. Si la fonction R satisfait à $R(\theta+\pi) = R(\theta)$, alors le point $M'(R(\theta), \theta+\pi)$ est issu de $M(R(\theta), \theta)$ dans une symétrie centrale par rapport à l'origine : $x' = -x$, $y' = -y$. On étudie la fonction R dans l'intervalle $[0, \pi]$ typiquement.
Si la fonction R satisfait à $R(\theta+\pi) = -R(\theta)$, alors, toutes choses égales par ailleurs, $x' = x$ et $y' = y$. La courbe Γ est inchangée dans cette transformation. On se contente d'un intervalle d'étude de la forme $[\alpha, \alpha+\pi]$ pour un nombre α laissé au choix pour chaque cas particulier.

- Réduction de l'intervalle d'étude : $\theta \longrightarrow \pi-\theta$.

Dans cette transformation, la fonction sinus est inchangée alors que la fonction cosinus change de signe. Si on a $R(\pi-\theta) = R(\theta)$, il vient $x' = R(\theta)\cos(\pi-\theta) = -x$ et $y' = R(\theta)\sin(\pi-\theta) = y$. Le point $M(R(\theta), \theta)$ se transforme en $M'(R(\theta), \pi-\theta)$ dans la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie la fonction R par exemple pour $\theta \geq \frac{\pi}{2}$.
Si $R(\pi-\theta) = -R(\theta)$, un calcul analogue au précédent montre que $x' = x$ et $y' = -y$. On retrouve une invariance de la courbe Γ dans la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et comme plus haut, on se contente de prendre $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ pour étudier la fonction R.

- Réduction de l'intervalle d'étude : $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\theta$.

Le sinus de l'angle complémentaire est par définition le cosinus. Réciproquement, le cosinus de l'angle complémentaire $\frac{\pi}{2}-\theta$ est égal au sinus de l'angle θ. On se contente d'étudier la fonction R pour $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ par exemple.
Si on a $R\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = R(\theta)$, il vient : $x' = R(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = y$ et $y' = R(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x$. La courbe Γ est invariante dans la transformation qui échange les coordonnées, c'est à dire la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice, la droite Δ d'équation $y = x$.
Si au contraire $R\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -R(\theta)$, on trouve comme ci-dessus $x' = -y$ et $y' = -x$. La courbe Γ est invariante dans la transformation $(x, y) \longmapsto (x', y') = (-y, -x)$, c'est à dire la symétrie orthogonale par rapport à la seconde bissectrice, la droite Δ' d'équation $x+y = 0$.

- Vecteur tangent

Si la fonction R est dérivable, il est naturel de chercher une tangente à la courbe Γ en dérivant le point $M(\theta)$ qui satisfait à $\overrightarrow{\mathrm{O}M}(\theta) = R(\theta)\, e_r(\theta)$. L'expression du vecteur dérivé est simple dans la base locale $(e_r(\theta), e_\theta(\theta))$: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\, e_r(\theta) + R(\theta)\, e_\theta(\theta)$.
Le point M est régulier lorsque le vecteur $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ est non nul, c'est à dire lorsque
$R^2(\theta) + \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \neq 0$. Dans ce cas, l'angle φ (à π près) entre le vecteur $e_r(\theta)$ et le vecteur $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ a une tangente qui satisfait à la relation $\tan\varphi = R(\theta)/\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}$.
Si $R(\theta_0)$ est nul (avec $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) \neq 0$), le point $M(\theta_0)$ est exactement à l'origine et le vecteur tangent est colinéaire au vecteur $e_r(\theta_0)$.
Si $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = 0$, tout en supposant $R(\theta_0) \neq 0$, alors la tangente de l'angle entre le vecteur $e_r(\theta_0)$ et le vecteur $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)$ est infinie : le vecteur tangent est colinéaire au vecteur $e_\theta(\theta_0)$.

- Point d'inflexion et point singulier

Le cas d'un point d'inflexion est défini par le fait que les vecteurs dérivée première $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}$ et dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2}$ sont colinéaires. Or on a $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\, e_r(\theta) + R(\theta)\, e_\theta(\theta)$ et après un calcul algébrique de quelques lignes $\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}\theta^2} = \big(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} - R(\theta)\big)\, e_r(\theta) + 2\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\, e_\theta(\theta)$. Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées dans la base $(e_r(\theta), e_\theta(\theta))$ est nul, c'est à dire si et seulement si $R(\theta)^2 + 2\,\big(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 - R(\theta)\,\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$.
Dans le cas où le vecteur dérivé est nul, ses deux composantes sont nulles en même temps dans le repère local : $R(\theta_0) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0) = 0$. Cette situation conduit en général à un point de rebroussement. Nous ne détaillons pas ici ce cas spécifique en toute généralité et nous renvoyons plus bas à l'étude de la cardioïde.

- Un exemple : la strophoïde droite

On se donne une échelle de longueur $a > 0$. La strophoïde droite est une courbe Γ que l'on peut (par exemple !) décrire avec l'équation cartésienne $y\,(x^2+y^2) + a\,(x^2-y^2) = 0$. On en tire une repésentation en coordonnées polaires en substituant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors après un peu de trigonométrie, on a $r = -a\,\frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta}$.
Le changement $\theta \longrightarrow -\theta$ transforme r en $-r$; donc la courbe Γ a une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées. De plus, le changement $\theta \longrightarrow \theta+\pi$ change r en $-r$, ce qui indique que la courbe Γ est inchangée dans cette transformation. Il suffit donc d'étudier la fonction $\theta \longmapsto -a\,\frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta}$ pour $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Il y a une branche infinie si θ tend vers zéro. Mais alors d'une part $y(\theta) = -a\cos(2\theta)$ tend vers $-a$ et d'autre part $x(\theta)$ tend vers $-\infty$: la droite d'équation $y = -a$ est une asymptote à la courbe Γ.
La fonction $\theta \longmapsto -a\,\frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta}$ est croissante sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. En effet, la dérivée de cette fonction vaut $a\cos\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} + 2\right)$ qui reste strictement positif si $\theta < \frac{\pi}{2}$ et s'annule en $\theta = \frac{\pi}{2}$. De plus, on a $r = 0$ si $\theta = \frac{\pi}{4}$: l'origine est un point de la courbe et la tangente en ce point est la première bissectrice. Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $r = a$ et la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $e_\theta\big(\frac{\pi}{2}\big)$; elle est donc parallèle à l'axe des abscisses.
Une fois tracé ce premier arc de courbe, on le complète par symétrie, ce qui conduit à la figure 2.

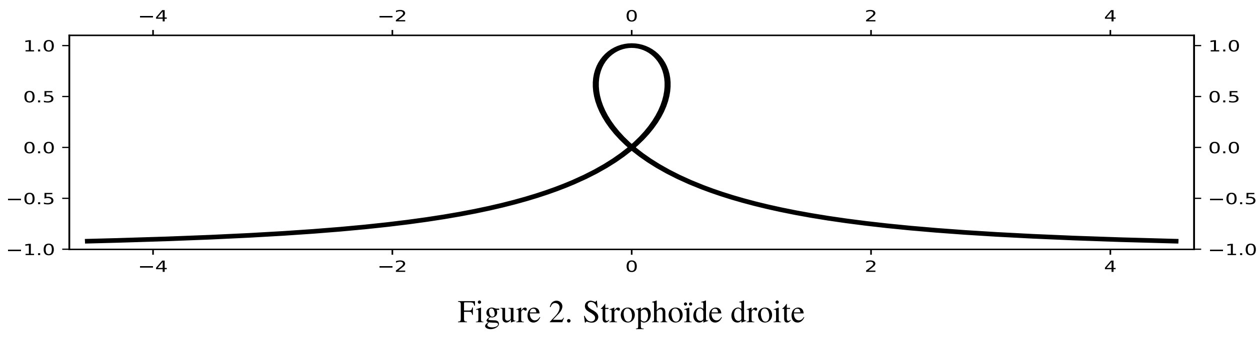

Figure 2. Strophoïde droite

- Un second exemple : la cardioïde

C'est la courbe Γ d'équation $r = a\,(1-\cos\theta)$. Il suffit bien entendu de supposer $0 \le \theta \le 2\pi$. De plus, si on change θ en $-\theta$, la fonction n'est pas modifiée et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des absicsses. On peut se contenter de l'étudier pour θ dans l'intervalle $[0, \pi]$.
Si $\theta = 0$, on a à la fois $r = 0$ et $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0$: l'origine est un point singulier. On étudie directement le développement de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ lorsque θ est proche de zéro. Il vient après des calculs classiques de développements limités : $x(\theta) = a\,\frac{\theta^2}{2} + \mathrm{O}(\theta^4)$ et $y(\theta) = a\,\frac{\theta^3}{2} + \mathrm{O}(\theta^5)$. Ce type de développement est typique d'un point de rebroussement de première espèce avec un tangente confondue avec l'axe des abscisses.
Pour $0 \le \theta \le \pi$, on a $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = a\,\sin\theta$ qui reste positif et le rayon vecteur croît de 0 à $2a$. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $r = a$; en ce point, on a $r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ et la tangente à la cardioïde Γ a une direction orientée avec un angle de $\frac{\pi}{4}$ dans la base locale (e_r, e_θ): c'est donc une droite parallèle à la seconde bissectrice d'équation $x + y = 0$. Pour $\theta = \pi$, on a $r = 2a$ et $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0$: la tangente à Γ en ce point est colinéaire au vecteur $e_\theta(\pi)$, ce qui signifie qu'elle est dirigée par une parallèle à l'axe des ordonnées.
On complète enfin le dessin de la courbe Γ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses ; on se reporte à la figure 3.

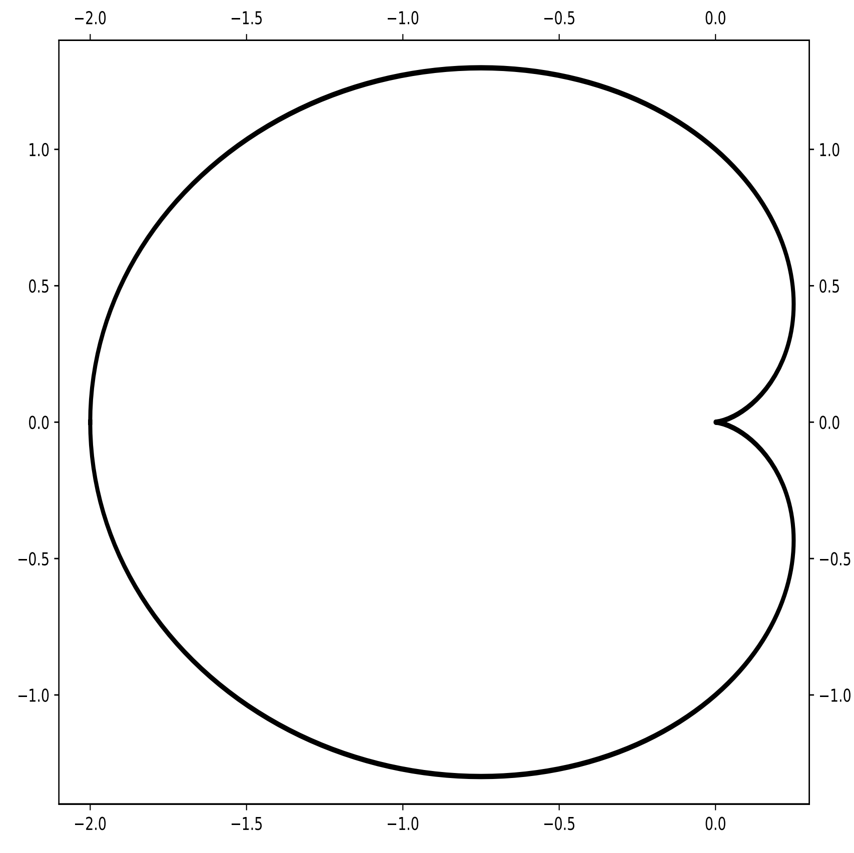

Figure 3. Cardioïde

En épilogue, la cardioïde Γ est aussi la courbe enveloppe des rayons lumineux issus d'une direction fixe et qui se réfléchissent sur le bord circulaire d'une tasse [de café]. La preuve de cette propriété est aussi un très bon exercice !

Exercices

- Une courbe paramétrée

On considère la courbe Γ paramétrée par les fonctions $x(t) = t - 1 + \frac{1}{2t^2}$ et $y(t) = t + \frac{1}{t}$.

a) Etude des branches infinies pour t tendant vers zéro et t tendant vers l'infini.

b) Etude locale de la forme de la courbe au voisinage du point singulier $(x(1), y(1))$ pour lequel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(1) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(1) = 0$.

c) Construire et représenter graphiquement la courbe Γ.

- Un cercle en coordonnées polaires [d'après Nathalie Zanon]

On se donne deux nombres réels a et b et on note Ω le point de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormé du plan affine euclidien. On appelle C le cercle de centre Ω et contenant l'origine O.

a) Quelle est l'équation cartésienne du cercle C ?

On choisit l'origine O comme origine des coordonnées polaires (r, θ) du plan. On suppose que le point Ω a des coordonnées polaires qui s'écrivent $r = R$ et $\theta = \alpha$.

b) Comment relier les données a, b, R et α ?

c) Quelle est l'équation du cercle C en coordonnées polaires ?

d) Si on change θ en $\theta + \pi$, que devient la courbe C ?

e) Montrer qu'avec le changement $\theta \longrightarrow 2\alpha - \theta$, on décrit deux composantes symétriques du cercle C.

f) En prenant d'abord θ dans un intervalle bien choisi d'extrémité α, construire l'ensemble de la courbe C à partir de son équation en coordonnées polaires.

- Une courbe en coordonnées polaires [d'après Nathalie Zanon]

On étudie la courbe Γ qui admet l'équation $\rho = \frac{\cos\theta}{1-2\sin\theta}$ en coordonnées polaires.

a) Pour quelles valeurs de θ la variable ρ n'est-elle pas définie ?

b) Quelle symétrie est induite par la transformation $\theta \longrightarrow \pi - \theta$?

c) Sur quel intervalle doit-on étudier la fonction $\theta \longmapsto \rho(\theta) = \frac{\cos\theta}{1-2\sin\theta}$?

d) Montrer que si θ est voisin de $\frac{\pi}{6}$, la courbe Γ a pour asymptote la droite d'équation $x - y\sqrt{3} = 1$. On placera la courbe par rapport à son asymptote.

e) Construire la courbe Γ.