le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 10 Fonctions de deux variables réelles

• Quelques exemples de fonctions de deux variables réelles

Une fonction affine : $\alpha(x, y) = a\,x + b\,y + c$, une fonction quadratique : $f(x, y) = x^2 - y^2$, ou avec une racine carrée : $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Une fonction à la fois fonction puissance et fonction exponentielle : $h(x, y) = x^y$ et une fraction rationnelle :
$r(x, y) = \frac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $r(0, 0) = 0$. Enfin une fonction singulière :
$s(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $s(0, 0) = 0$.

• Ensemble de définition

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles associe à tout couple (x, y) de réels un et un seul nombre $f(x, y)$ si (x, y) appartient à son ensemble de définition D. Si $(x, y) \notin D$, alors le nombre $f(x, y)$ n'existe pas.
Une fonction réelle d'ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}^2$ est une application de D dans $\mathbb{R}$. A tout argument $(x, y) \in D$, on peut déterminer un et un seul nombre réel $f(x, y) \in \mathbb{R}$. Ce nombre $f(x, y)$ est l'image du point (x, y) par l'application f. On note souvent une fonction de la façon suivante $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ ou parfois sous la forme
$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ afin de condenser les deux notations.
Pour les exemples proposés ci-dessus, on a $D_\alpha = \mathbb{R}^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$, $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, disque fermé de centre l'origine et de rayon un. Le détermination de D_h est un excellent exercice. Nous retenons ici que $]0, +\infty[\, \times \mathbb{R} \subset D_h$. On a enfin $D_r = D_s = \mathbb{R}^2$.

• Fonctions partielles

Une fonction de deux variables définit (au moins) une double infinité de fonctions à une variable. D'une part, si on se donne $b \in \mathbb{R}$, on dispose de la fonction $x \longmapsto f(x, b)$ de la première variable. D'autre part, si on se donne $a \in \mathbb{R}$, on peut définir une fonction $y \longmapsto f(a, y)$ de la seconde variable.

• Graphe

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble de définition d'une fonction f de deux variables réelles et à valeurs réelles. Le graphe de la fonction f est l'ensemble G des points de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(x, y, f(x, y))$ avec (x, y) dans l'ensemble de définition D. On peut écrire aussi
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in D,\ z = f(x,y)\}$.
On parle aussi de surface d'équation $z = f(x, y)$ pour désigner le graphe de f. Dans le cas d'une fonction affine, cette surface est un plan.

François Dubois, avril 2022.

- Lignes de niveau

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables et k un nombre réel, la ligne de niveau L_k est l'ensemble des points $(x, y) \in D$ tels que $f(x, y) = k$.
Si $k \neq m$, les lignes de niveau L_k et L_m ne peuvent pas se couper.

- Dérivées partielles

On se donne une fonction $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ de deux variables et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition de f. On dit que f admet une dérivée partielle au point (a, b) selon la première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, si et seulement si la fonction partielle $x \longmapsto f(x, b)$ est dérivable au point a. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\big[f(a+t, b) - f(a, b)\big]$.
De même, on dit que f admet une dérivée partielle au point (a, b) selon la deuxième variable, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, si et seulement si la fonction partielle $y \longmapsto f(a, y)$ est dérivable au point b. On a : $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\theta \longrightarrow a} \frac{1}{\theta}\big[f(a, b+\theta) - f(a, b)\big]$.
Le calcul des dérivées partielles des fonctions proposées en exemple est un bon exercice. On a ainsi $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = a$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = b$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{g}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{g}$, $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{y}{x} h$, $\frac{\partial h}{\partial y} = (\log x)\, h$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2 x y^4}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2 x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$.
Le symbole ∂ pour la dérivée partielle, appelé aussi "d rond", a été proposé par le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752–1833).

- Continuité

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point $(a, b) \in D$. On dit que f est continue au point (a, b) si et seulement si la fonction $\varphi(u, v)$ définie par $\varphi(u, v) = f(a+u, b+v) - f(a, b)$ tend vers zéro si le point (u, v) tend vers l'origine.
Ainsi, pour toute erreur $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite, on peut trouver un (petit) disque (non vide !) de rayon $\eta > 0$ de sorte que si le point $(x, y) \in D$ appartient au disque de centre (a, b) et de rayon $\eta > 0$, c'est à dire si la distance entre $(x, y) \in D$ et (a, b) est inférieure à η, alors l'erreur $|f(x, y) - f(a, b)|$ entre les valeurs prises par la fonction est inférieure (strictement) à ε :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in D, d((x, y), (a, b)) < \eta \Longrightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$.
Les fonctions α, f et g proposées dans les exemples plus haut sont continues en $(0, 0)$. Les fonctions h et s ne le sont pas (exercice !).
Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point $(a, b) \in D$, on dit qu'elle est continue sur D.
Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur D et si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée $(g \circ f)(x, y) \equiv g(f(x, y))$ est une fonction continue sur D.

- Différentiabilité

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point $(a, b) \in D$. On dit que f est différentiable au point (a, b) si la fonction f est "proche" d'une fonction affine au voisinage du point (a, b).
Par exemple, si on choisit pour f un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à deux, expression de la forme $f(x, y) = p\,x + q\,y + r + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta\, x\, y + \frac{1}{2}\varepsilon\, y^2$, on remarque d'abord que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma\, a + \delta\, b$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta\, a + \varepsilon\, b$. On peut aussi faire le calcul direct de $f(a+u, b+v)$, en remplaçant x par $a+u$ et y par $b+v$:

$f(a+u, b+v) = f(a, b) + (p+\gamma a+\delta b)\, u + (q+\delta a+\varepsilon b)\, v + \frac{1}{2}\gamma u^2 + \delta u v + \frac{1}{2}\varepsilon v^2$. On peut remplacer $(p+\gamma a+\delta b)$ par $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $(q+\delta a+\varepsilon b)$ par $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ dans l'expression précédente. On en déduit : $f(a+u, b+v) = f(a, b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v\right] + \psi(u, v)$. Dans notre cas de figure, la fonction "reste" ψ est une fonction polynômiale de degré deux :
$\psi(u, v) = \left(\frac{1}{2}\gamma u^2 + \delta u v + \frac{1}{2}\varepsilon v^2\right)$. Cette fonction tend vers zéro plus vite que la norme
$\|(u, v)\| \equiv \sqrt{u^2+v^2}$. La fonction f est donc bien approchée pour les points "voisins" de (a, b) par la fonction affine $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto f(a, b) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v\right]$.
De manière générale, la fonction f est différentiable au point (a, b) si et seulement si il existe deux nombres α et β et une fonction φ de deux variables qui tend vers zéro à l'origine de sorte que l'on a le développement suivant pour $(x, y) = (a+u, b+v)$ et (u, v) tendant vers zéro :
$f(a+u, b+v) = f(a, b) + \alpha u + \beta v + \|(u, v)\|\ \varphi(u, v)$.
Si f est différentiable au point (a, b), elle a aussi des dérivées partielles en ce point. De plus, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \alpha$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \beta$.
Si f est différentiable au point (a, b), son graphe G est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui admet un plan tangent au point $(a, b, c = f(a, b))$. Ce plan tangent a une équation qui s'obtient en tronquant le reste dans la définition de la différentielle : $z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y-b)$.

- Théorème : la différentiabilité entraîne la continuité

Si f est différentiable en $(a, b) \in D$, alors elle est continue en ce point. Par contre, l'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la différentiabilité, comme le montre la fonction s au point $(0, 0)$: les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$ existent alors que la fonction s n'est pas continue à l'origine.
Si f est différentiable en tout point (a, b) de son ensemble de définition, on dit simplement que f est différentiable sur D.

- Dérivation des fonctions composées : un premier cas.

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie sur D et deux fonctions $\mathbb{R} \ni t \longmapsto X(t)$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto Y(t)$ de telle sorte que pour tout t, $(X(t), Y(t)) \in D$. Alors la fonction composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ est bien définie pour tout t.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.

- Exemple de dérivation de fonctions composées

La relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(X(t), Y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$ se découvre par le calcul algébrique si on choisit par exemple une fonction f polynômiale de degré deux comme on a pu le faire plus haut : $f(x, y) = p x + q y + r + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x y + \frac{1}{2}\varepsilon y^2$. On sait que de façon générale, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma a + \delta b$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta a + \varepsilon b$. Donc en particulier,
$\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t), Y(t)\big) = p + \gamma X(t) + \delta Y(t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t), Y(t)\big) = q + \delta X(t) + \varepsilon Y(t)$.
La fonction composée $g(t)$ a donc pour expression :
$g(t) = p\, X(t) + q\, Y(t) + r + \frac{1}{2}\gamma X(t)^2 + \delta X(t)\, Y(t) + \frac{1}{2}\varepsilon Y(t)^2$. On la dérive avec les règles usuelles qui permettent de prendre en compte les fonctions composées à une variable :

$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = p\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + q\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \gamma\,X(t)\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \delta\,\big(X(t)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\,Y(t)\big) + \varepsilon\,Y(t)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On factorise $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$:
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \Big(p + \gamma\,X(t) + \delta\,Y(t)\Big)\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \Big(q + \delta\,X(t) + \varepsilon\,Y(t)\Big)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On peut donc, compte tenu du calcul fait plus haut, réecrire cette expression sous la forme $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.
Et l'expression que nous venons d'obtenir est en fait très générale.

- Dérivation des fonctions composées : un second cas

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et deux autres fonctions de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto X(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto Y(u, v) \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout $(u, v) \in \Delta$, $(X(u, v), Y(u, v)) \in D$. Alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est bien définie sur Δ.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur Δ, alors la fonction composée g est une fonction de deux variables continue sur Δ.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont différentiables sur Δ, alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est différentible sur Δ et les dérivées partielles se calculent comme suit : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial v}$.
Afin d'alléger l'écriture, nous avons omis d'expliciter les arguments des différentes fonctions dans les deux relations précédentes. Sauriez-vous les rétablir ?

Exercices

- Ensembles de définition [d'après Nathalie Zanon]

Déterminer et dessiner les ensembles de définition pour les fonctions suivantes
a) $f_1(x) = \frac{\ln(y-x)}{x}$
b) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

- Lignes de niveau

Dessiner les lignes de niveau L_1, L_{-1} et L_0 de la fonction $f(x) = x\,y$.

- Dérivées partielles [d'après Nathalie Zanon]

On se donne les deux fonctions suivantes : $f_1(x) = 4x^3 + 4x\,y^2 + x^2 + y^2 - 4x$ et $f_2(x) = \exp(x^2 - 3x\,y + 2y^2)$. Pour chacune de ces fonctions f, répondre aux questions suivantes.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'ordre un.
b) Évaluer les dérivées partielles d'ordre deux $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)$, $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)$, $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)$.
c) Que remarquez-vous ?

- Une fonction quelque peu singulière

On définit la fonction $s(x, y)$ par les relations suivantes : $s(0, 0) = 0$ et $s(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.
a) Quel est l'ensemble de définition de s ?
b) Calculer $s(x, 0)$ et $s(0, y)$ pour tout nombre réel x et tout nombre réel y.
c) En déduire, en se ramenant à la définition d'une dérivée partielle, que la fonction s admet deux dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$ à l'origine, qu'on calculera.

d) Calculer $s(x, x^2)$ lorsque $y = x^2$ pour tout nombre réel x.
e) En déduire que la fonction s n'est pas continue à l'origine.

- Méthode des caractéristiques

On se donne un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ et une fonction dérivable u_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche une fonction inconnue $u(x,t)$ de deux variables qui satisfait d'une part à l'équation d'advection, c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ et d'autre part à la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $v(t) = u(at + y, t)$.
a) Montrer que si la fonction u est solution de l'équation d'advection, alors la dérivée $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.
b) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 0$, $u(at + y, t) = u_0(y)$.
c) En déduire que toute solution différentiable de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ qui satisfait aussi à la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $u(x,t) = u_0(x - at)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
d) Vérifier par un calcul élémentaire que la fonction u définie par $u(x,t) = u_0(x - at)$ est effectivement solution du problème formé d'une part de l'équation d'advection $\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$) et d'autre part de la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ (pour $x \in \mathbb{R}$).

- Noyau de l'équation de la chaleur

On se donne $\sigma > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on pose $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2 t})$.
Vérifier que la fonction φ est solution de l'équation de la chaleur à une dimension spatiale : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

- Méthode de d'Alembert pour l'équation des ondes

On cherche à déterminer l'expression générale d'une fonction $f(x,y)$ régulière solution de l'équation des ondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pose $u = x + y$, $v = x - y$ et on introduit la fonction $g(u,v)$ définie par $g(u,v) = f(x,y)$.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.
b) Exprimer la combinaison $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.
c) Résoudre par intégrations successives l'équation obtenue.
d) En déduire qu'une solution générale $f(x,y)$ de l'équation des ondes peut se décomposer sous la forme $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, où les fonctions d'une seule variable φ et ψ sont arbitraires.
e) Vérifier que si la fonction f est de la forme $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, elle est bien solution de l'équation des ondes.