le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 12 — Introduction à l'intégrale double

- Propriétés fondamentales de l'intégrale simple [rappels]

On se donne deux nombres réels $a < b$ et une fonction $f\,:\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale simple $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de f sur l'intervalle $[a,b]$, notée également $\int_{[a,b]} f$, est un nombre réel qui satisfait aux propriétés fondamentales décrites ci-dessous.

★ Longueur. Si $f(x) = 1$ pour tout x, alors $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

★ Linéarité. Si f et g sont deux fonctions $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et λ un nombre réel, on a $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \big(\lambda\, f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

★ Positivité. Si f est une fonction positive, c'est à dire $f(x) \geq 0$ pour tout x, alors l'intégrale est positive : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. On remarque que cette propriété est en défaut si on ne suppose pas $a < b$.

★ Additivité par rapport au domaine (relation de Chasles). Si $a < c < b$, alors
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Les propriétés précédentes s'étendent tout naturellement pour l'intégrale double, ce qui n'est pas tout à fait le cas des propriétés qui suivent.

- Propriétés spécifiques de l'intégrale simple [rappels]

★ Théorème fondamental de l'Analyse et intégration par parties. On suppose f fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application ψ définie par $\psi(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ est une fonction dérivable de la variable x et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big) = f(x)$. En conséquence, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}\xi = f(b) - f(a)$. En pratique, on exprime ce résultat de la façon suivante : si on se donne une primitive F de la fonction f (c'est à dire $F' = f$), alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

★ Changement de variable. On suppose l'intervalle $[a,b]$ paramétré par une fonction φ bijective croissante régulière de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$: $x = \varphi(t)$ avec $t \in [\alpha,\beta]$. Alors
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

★ Calcul de surfaces. Si la fonction f est positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours avec $a < b$), alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire $|\Omega|$ du domaine Ω entre les abscisses a et b d'une part, l'axe des abscisses et la courbe $y = f(x)$ d'autre part :
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$. On a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = |\Omega|$.

- Propriétés fondamentales de l'intégrale double

On se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou parfois $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

François Dubois, mai 2022.

⋆ Surface ; intégrale double de la fonction "un". Si on prend pour domaine Ω le rectangle $]a,b[\times]c,d[$ du plan $\mathbb{R}^2$ (avec $a<b$ et $c<d$), l'intégrale double de la fonction $f(x,y)\equiv 1$ est simplement la surface $(b-a)\,(d-c)$ du rectangle : $\int_{]a,b[\times]c,d[}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(b-a)\,(d-c)$.
De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, c'est à dire si Ω est inclus dans un rectangle assez grand, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x,y)\equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=|\Omega|$.

⋆ Linéarité. On suppose connue l'intégrale double $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ de la fonction f et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega(\lambda f)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lambda\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ de la fonction g, alors
$\int_\Omega(f+g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

⋆ Positivité. On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x,y)\geq 0,\ \forall\,(x,y)\in\Omega$. Alors $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geq 0$. Si $f\leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x,y)\leq g(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\Omega$, alors $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leq\int_\Omega g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ [exercice].

⋆ Additivité par rapport au domaine. On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega=\cup_{i=1}^N\Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i\cap\Omega_j$ est de surface nulle si $i\neq j$: $|\Omega_i\cap\Omega_j|=0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i: $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^N\int_{\Omega_i}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i: $\forall\,i=1,\ldots,N,\ \exists\,\lambda_i\in\mathbb{R},\ \forall\,(x,y)\in\Omega_i,\ f(x,y)=\lambda_i$.
Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^N\lambda_i\,|\Omega_i|$ [exercice].

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et par $f\in C^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :
$\forall\,X\in\overline{\Omega},\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ \forall\,Y\in\overline{\Omega},\ |X-Y|<\eta\Longrightarrow|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.
Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon-\varepsilon\leq f\leq f_\varepsilon+\varepsilon$ sur Ω. Alors le nombre $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ satisfait nécessairement aux inégalités
$\int_\Omega f_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\varepsilon\,|\Omega|\leq\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leq\int_\Omega f_\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\varepsilon\,|\Omega|$.
On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction étagée qui approche la fonction f.

- Théorème de Fubini

On se donne un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ borné (ce qui signifie que Ω peut être inclus dans un rectangle assez grand). On se donne une fonction bornée de Ω dans $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes : $\exists\,M\geq 0,\forall\,(x,y)\in\Omega,\ |f(x,y)|\leq M$. Alors l'intégrale de la valeur absolue de f est finie : $\iint_\Omega|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty$. De plus, l'intégrale double de f dans le domaine Ω existe bien, on a l'inégalité $|\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y|\leq\iint_\Omega|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et on peut toujours intégrer cette fonction de deux variables "dans l'ordre que l'on veut".
De façon plus précise, si Ω est compris entre deux courbes de la forme $y=\varphi(x)$ comme à la

figure 1, c'est à dire $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\}$, on a $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \Big[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y) \Big]$. Si Ω est compris entre deux courbes de la forme $x = \psi(y)$ comme à la figure 2, c'est à dire $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(y)\}$, on a
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \Big[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y) \Big]$.
Dans le cas où le domaine Ω peut être paramétré de l'une ou l'autre manière, on calcule l'intégrale double par l'une quelconque des relations précédentes et
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \Big[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y) \Big] = \int_c^d \mathrm{d}y \Big[\int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} \mathrm{d}x\, f(x,y) \Big]$.

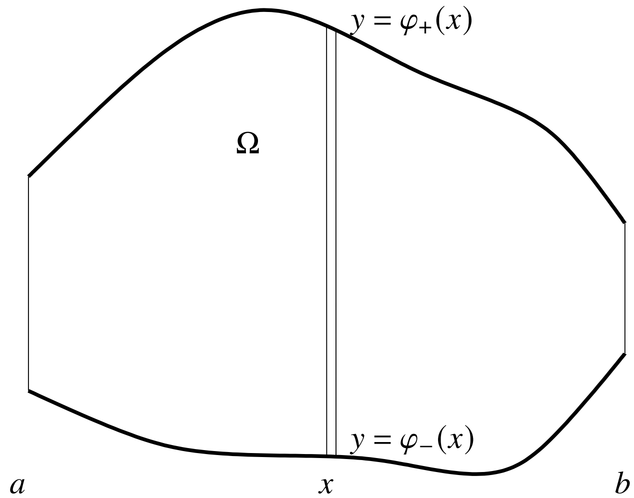

Figure 1. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω, d'abord par intégration de la fonction f par rapport à y entre $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$, puis par intégration en x entre a et b du résultat obtenu.

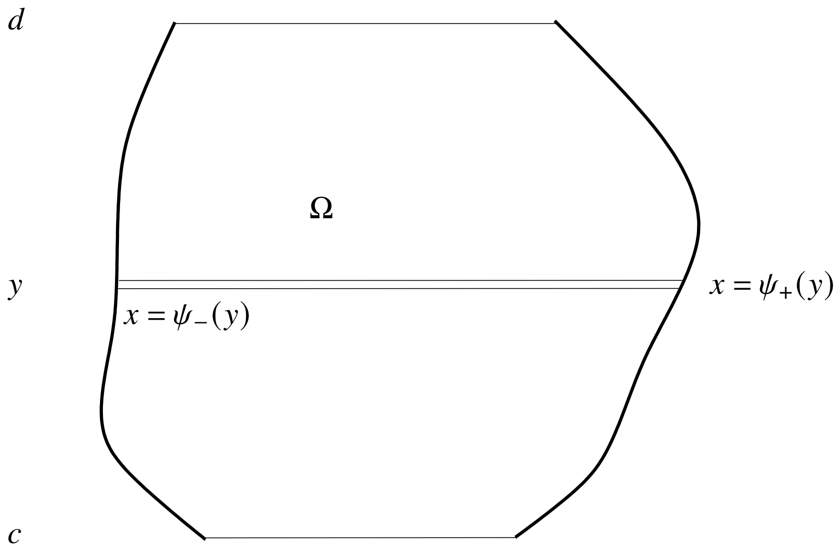

Figure 2. Calcul de l'intégrale double dans le domaine Ω, d'abord par intégration de la fonction f par rapport à x entre $\psi_-(y)$ et $\psi_+(y)$, puis par intégration en y entre c et d du résultat obtenu.

- Un premier exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux nombres réels $a < b$ et une application intégrable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose la fonction f positive : $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0$. On considère le domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ déjà introduit dans le cas de l'étude de l'intégrale simple. Alors le théorème de Fubini (prendre $\varphi_- = 0$ et $\varphi_+ = f$) permet de conclure que $|\Omega| = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$. On retrouve ainsi le lien entre l'intégrale simple et le calcul de surfaces.

- Un second exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On peut vérifier la conclusion du théorème de Fubini en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Un troisième exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x, y)| \leq a + b$ si $(x, y) \in T$. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a \mathrm{d}x \big[\int_0^{b\,(1-x/a)} \mathrm{d}y\,(x-y)\big]$ et $\int_0^b \mathrm{d}y \big[\int_0^{a\,(1-y/b)} \mathrm{d}x\,(x-y)\big]$ sont égales et valent $\frac{a\,b}{6}\,(a-b)$, valeur de l'intégrale double de la fonction f dans le triangle T.

Exercices

- Domaines rectangulaires

a) Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\}$. Calculer l'intégrale double $\int_D x\,y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. [1]

b) Même question avec l'intégrale $\int\int_D x\, \sin(x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ dans le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$. [$\pi - 2$]

- Calcul d'aire

Soit $a < b$ et h trois nombres réels strictement positifs. On note A et B les points de coordonnées $(0, a)$ et (h, b). On appelle P le parallélogramme bordé par l'axe des abscisses, les droites $x = 0$, $x = h$ et la droite AB.

a) A l'aide d'un calcul intégral classique, rappeler la valeur de l'aire de P.

b) Par un calcul d'intégrale double, retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini et une intégration d'abord selon y puis ensuite selon x.

c) Reprendre le calcul précédent en utilisant d'abord une intégration selon x puis une intégration selon y. [$\frac{1}{2}\,h\,(a+b)$]

- Echange de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f définie pour x et y réels. Ecrire l'expression de l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\, f(x, y) = \int_?^? \mathrm{d}x \int_?^? \mathrm{d}y\, f(x, y)$ obtenue après échange de l'ordre des intégrales.

[remarquer que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$]