

Devoir 4

à rendre pour la séance numéro 13, le 24 mai 2022

Expression du laplacien en coordonnées polaires

On se donne un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2)$ du plan affine euclidien \mathcal{E}_2 . Un point M arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes x, y dans le repère $(O; e_1, e_2)$ de sorte que $\overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2$. Il a aussi des coordonnées polaires (r, θ) de sorte que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

On se donne une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le laplacien Δf de la fonction f est la fonction de deux variables définie par $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

- 1) Calculer le laplacien dans le cas particulier de la fonction $f_0(x, y) = x^2 + y^2$.
- 2) Sachant que $r^2 = x^2 + y^2$, montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$ sont respectivement égales à $\frac{x}{r} = \cos \theta$ et $\frac{y}{r} = \sin \theta$.
- 3) De même, partant de la relation $\tan \theta = \frac{y}{x}$, montrer que l'on a $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta$ et $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta$.

On exprime une fonction régulière arbitraire f à l'aide des coordonnées polaires ; on pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- 4) Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- 5) En déduire les relations : $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$.
- 6) Afin de dériver une nouvelle fois par rapport à x la première expression et par rapport à y la seconde, montrer en utilisant certaines des relations précédentes pour les fonctions $f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $f_2(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $f_3(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f_4(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, que l'on a les quatre relations suivantes : $\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta) = \frac{1}{r} \sin^2 \theta$, $\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{r} \sin \theta) = \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$, $\frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta) = \frac{1}{r} \cos^2 \theta$ et $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r} \cos \theta) = -\frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$.
- 7) A partir des relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$, de la règle de dérivation d'un produit et des relations proposées à la question 6), en déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de $r, \theta, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$. Attention, chacun des résultats pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ comporte cinq termes !
- 8) Déduire de la question précédente que $\Delta f(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.