

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 3 Opérateurs linéaires

- Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 sont des espaces vectoriels. Ils disposent d'une addition :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ dans \mathbb{R}^2 , $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ dans \mathbb{R}^3 et d'une multiplication externe par un scalaire, notée avec un point : $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ d'une part et $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ d'autre part. Nous avons rencontré lors de la leçon précédente d'autres exemples d'espaces vectoriels : l'ensemble des matrices \mathcal{M}_{nm} à n lignes et m colonnes est un espace vectoriel pour la somme des matrices et leur multiplication externe.

- Espace vectoriel sur \mathbb{R}

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est la donnée d'un ensemble (de vecteurs) E , d'une addition $E \times E \longrightarrow E$ qui à x, y appartenant à E associe $x + y$, qui est encore un vecteur de E , et d'une multiplication externe d'un scalaire par un vecteur $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ associe le vecteur $\lambda \cdot x$ de l'espace E .

L'addition dans l'espace E définit un groupe commutatif : $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x + y = y + x$, $x + 0 = 0 + x = x$ et $x + (-x) = (-x) + x = 0$. De plus, la multiplication externe par un scalaire est cohérente avec l'addition et la multiplication des nombres : $1 \cdot x = x$,

$$(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x), \quad \lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x.$$

Un espace vectoriel permet de faire de nombreux calculs. Il étend en particulier aux espaces de fonctions les propriétés des vecteurs de l'espace ordinaire.

- Un autre exemple d'espace vectoriel

On note P_1 l'ensemble des fonctions affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} : une fonction φ qui appartient à l'espace P_1 associe à tout nombre réel t le nombre $\varphi(t) = at + b$. Si $\varphi \in P_1$, il existe a et b réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = at + b$. L'addition $\varphi + \psi$ des fonctions φ et ψ est définie par $(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t)$; la multiplication externe $\lambda \cdot \varphi$ d'une fonction φ par un scalaire λ est définie par $(\lambda \cdot \varphi)(t) = \lambda \varphi(t)$.

- Combinaison linéaire

On se donne un entier n et une famille x_1, \dots, x_n de vecteurs de l'espace vectoriel E . Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur x qui s'écrit sous la forme

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j, \quad \text{où les coefficients } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont des scalaires.}$$

- Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'addition de E et la multiplication externe par un scalaire munissent F d'une structure d'espace vectoriel.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E soit un sous espace vectoriel est que toute combinaison linéaire (calculée dans l'espace E) de vecteurs de F appartienne encore à F : pour tous les vecteurs x et y de F , la somme $x + y$ appartient à F et pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F , le produit $\lambda \cdot x$ appartient encore à F .

L'ensemble F des vecteurs lignes x de la forme $x = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

On se donne une famille finie x_1, \dots, x_n de vecteurs de l'espace vectoriel E . L'ensemble $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de toutes les combinaisons linéaires de la forme $\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est par définition le sous-espace vectoriel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ engendré par la famille des n vecteurs.

On se donne par exemple $u_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ et $u_2 = (1, 0)$ dans \mathbb{R}^2 . Alors

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \{(\frac{\alpha}{2} + \beta, \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Un autre exemple dans \mathbb{R}^3 : on pose $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$. Alors

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \{(\alpha - \gamma, -\alpha + \beta, -\beta + \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

- Famille libre

La famille de n vecteurs x_1, \dots, x_n est libre si et seulement si lorsqu'une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$ est nulle, alors tous les coefficients α_j sont nuls :

$$(\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j = 0) \implies (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0).$$

La famille de vecteurs (u_1, u_2) , où $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ est libre dans \mathbb{R}^2 . Il en est de même de la famille (e_1, e_2) , avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

- Famille liée

La famille de n vecteurs x_1, \dots, x_n est liée si et seulement si elle n'est pas libre. C'est le cas si et seulement si il existe une famille de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tous nuls, c'est à dire $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ de sorte que la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$ est nulle : $\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j = 0$.

Si on se donne par exemple trois points A, B et C dans le plan. Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CA} forment une famille liée. En effet la relation de Chasles exprime que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; on a une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls puisqu'ils valent tous 1.

Autre exemple dans \mathbb{R}^3 , avec $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$. La famille u_1, u_2, u_3 est liée.

- Famille génératrice

La famille de n vecteurs x_1, \dots, x_n est génératrice si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j.$$

On pose $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et $e_3 = (1, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 . Il en est de même de la famille (e_1, e_2) .

- Base

On se donne un espace vectoriel E et un entier n supérieur ou égal à 1. Une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E est une famille à la fois libre et génératrice. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs de la base : $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot e_j$. Les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ existent et sont uniques : $\forall x \in E, \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot e_j$.

Les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Dans l'espace P_1 des fonctions affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on pose $\varphi_0(t) = 1$ et $\varphi_1(t) = t$. Alors la famille (φ_0, φ_1) est une base de P_1 .

- Dimension

Si l'espace vectoriel E admet une base composée de n vecteurs, alors on dit que E est de dimension n : $\dim E = n$.

- Application linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F . Une application linéaire u de E dans F est une application de E dans F (pour tout x dans E , il existe un unique vecteur image $u(x)$ dans F) telle que pour tout x, y dans E et tout scalaire λ , on a $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$.

Une application linéaire de E dans F respecte les opérations d'addition et de multiplication externe par un scalaire dans les espaces E et F ; si l'application linéaire u de E dans F est donnée, alors pour tous les vecteurs x et y de E et tous les nombres α et β , on a

$$u(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot u(x) + \beta \cdot u(y).$$

Par exemple, l'identité id de \mathbb{R}^2 est l'application linéaire définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Si on décompose tout vecteur x de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 sous la forme $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ dans la base (e_1, e_2) , la projection p est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $p(x) = \alpha_1 e_1$.

La symétrie s est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $s(x) = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$.

Deux autres exemples : $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto (0, -\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$.

- Endomorphisme

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Si les espaces E et F sont égaux, on dit que l'application linéaire u est un endomorphisme de l'espace E dans lui-même. On note alors $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

- Noyau et image d'une application linéaire

On se donne $u \in \mathcal{L}(E, F)$: u est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F . Le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E, u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E .

L'image $\text{Im } u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de F qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: $\text{Im } u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F .

Avec les notations précédents, $\ker id = \{0\}$ et $\text{Im } id = \mathbb{R}^2$. De façon analogue, $\ker p = \langle e_1 \rangle$ (espace engendré par le vecteur e_1) et $\text{Im } p = \langle e_2 \rangle$ (espace engendré par le vecteur e_2). Enfin,

$\ker s = \{0\}$ et $\text{Im } s = \mathbb{R}^2$.

Lorsque E est de dimension finie, on a toujours l'égalité des dimensions : la dimension du noyau ajoutée à la dimension de l'image est exactement égale à la dimension de l'espace de départ. On a $\dim \ker u + \dim \text{Im } u = \dim E$.

- Matrice d'une application linéaire relativement à une base de E et à une base de F

On se donne un espace E de dimension n , un espace F de dimension p et une application linéaire u de E dans F . On se donne aussi une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et une base (f_1, f_2, \dots, f_p) de l'espace F . Pour $j = 1, \dots, n$, le vecteur $u(e_j)$ image d'un vecteur de la base de E se décompose de façon unique dans la base (f_1, f_2, \dots, f_p) : il existe des coefficients uniques $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{pj}$ de sorte que $u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \cdot f_i$. On regroupe ces np coefficients dans une matrice $M_u \equiv (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ à p lignes et n colonnes appelée matrice de l'application linéaire u relativement aux bases (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et (f_1, f_2, \dots, f_p) de F .

On écrit la matrice ainsi : $M_u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de l'image $u(e_j)$ du j° vecteur de base de l'espace de départ E définissent la j° colonne de la matrice M_u .

Si les espaces E et F sont égaux ($F = E$), on choisit alors usuellement la base (f_1, f_2, \dots, f_n) égale à (e_1, e_2, \dots, e_n) .

La matrice de l'identité id de l'espace \mathbb{R}^2 dans la base (e_1, e_2) s'écrit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice identité d'ordre 2. Dans les mêmes conditions, la matrice de la projection p est égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin, la symétrie s a pour matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2) .

Avec les mêmes notations, la matrice de l'application linéaire u_1 :

$\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto u_1(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique $e_1 = (1, 0)$,

$e_2 = (0, 1)$ est donnée par $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ désigne

la base canonique de \mathbb{R}^3 , la matrice de l'application linéaire u_2 :

$\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \mapsto (0, -\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ vaut $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Avec les notations précédentes, on regroupe les composantes x_1, x_2, \dots, x_n du vecteur

$x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j$ dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E sous la forme d'un vecteur X composé d'une

seule colonne et de n lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

De même, les coordonnées y_1, y_2, \dots, y_p du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^p y_i \cdot f_i$ dans la base (f_1, f_2, \dots, f_p) de F sont représentées avec un vecteur Y à une colonne et p lignes :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Alors les coordonnées $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice A par le

vecteur X :
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_u \cdot X.$$

Les coordonnées Y du vecteur image $u(x)$ s'obtiennent en multipliant la matrice M_u de l'opérateur u par les coordonnées X du vecteur $x \in E$.

Pour $p = 3, n = 2$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

- Composition des applications linéaires et produit des matrices

On se donne maintenant trois espaces vectoriels D, E et F de dimensions respectives q, n et p et deux applications linéaires $v : D \rightarrow E$ de D dans E et $u : E \rightarrow F$ de E dans F . On a alors le diagramme suivant $D \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$ qui permet de définir l'application composée $u \circ v$: $(u \circ v)(\xi) = u(v(\xi))$ pour tout vecteur $\xi \in D$. L'application composée $u \circ v$ est elle aussi linéaire.

On se donne une base (d_1, d_2, \dots, d_q) de l'espace D en complément des bases (e_1, e_2, \dots, e_n) et (f_1, f_2, \dots, f_p) des espaces E et F . On suppose que $v(d_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk} e_j$. Alors dans les bases (d_k) et (e_j) , l'application v est représentée par une matrice M_v à n lignes et q colonnes qui s'écrit $M_v = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq q}$. On a alors $(u \circ v)(d_k) = \sum_{i=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) f_i$ ce qui signifie que relativement aux bases (d_k) et (f_i) , l'application composée $u \circ v$ est représentée par une matrice $M_{u \circ v} = (c_{ik})$ à p lignes et q colonnes avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq p$ et

$1 \leq k \leq q$. Nous constatons que la matrice $M_{u \circ v}$ est égale au produit des matrices M_u et M_v : $M_{u \circ v} = M_u M_v$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pk} & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}.$$

Dans le produit $M_{u \circ v} = M_u M_v$, on remarque que le nombre n de colonnes de la matrice de gauche (ici M_u) est toujours égal au nombre de lignes n de la matrice de droite (ici M_v). Sinon, le produit $M_u M_v$ ne serait pas défini.

Exercices

- Un opérateur linéaire

On se donne un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base (e_1, e_2, e_3) . On se donne aussi un espace vectoriel F de dimension 2 et une base (f_1, f_2) de cet espace. On considère l'application linéaire u de E dans F qui satisfait aux relations $u(e_1) = f_1 - f_2$, $u(e_2) = f_1 + f_2$ et $u(e_3) = \frac{1}{2}f_1 + f_2$.

a) Quelle est la matrice A de l'application linéaire u relativement aux bases de E et F ?

b) Montrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ non nul de sorte que $\ker u = \langle v \rangle$.

[on peut choisir $v = (1, -3, 4)$]

c) Démontrer que $\text{Im } u = F$.

d) Vérifier que la relation $\dim E = \dim \ker u + \dim \text{Im } u$ est bien satisfaite.

- Un autre opérateur linéaire

On se donne l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. On se donne également l'application v de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par la relation $v(x, y, z) = x + y + z$.

a) Montrer que l'application v est linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

b) Quelle est la matrice B de l'application linéaire v ?

c) Trouver deux vecteurs indépendants θ_1 et θ_2 de \mathbb{R}^3 qui appartiennent tous deux au noyau $\ker v$ de l'application linéaire v .

d) Montrer que la famille (θ_1, θ_2) est une famille génératrice du noyau $\ker v$.

e) En déduire que l'espace $\ker v$ est de dimension 2.

f) Démontrer que $\text{Im } v = \mathbb{R}$.

- Une famille de trois vecteurs dans \mathbb{R}^2

On pose $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $u_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

a) Cette famille est-elle libre dans \mathbb{R}^2 ? Est-elle liée ?

b) Expliciter une combinaison linéaire simple des trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 qui est nulle tout en ayant des coefficients non tous nuls.

- Un sous-espace de \mathbb{R}^3

On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

- Montrer que muni de l'addition des vecteurs et de leur multiplication externe par les nombres, l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- On pose $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 0)$. La famille (u_1, u_2) est-elle une base de E ?
- On pose $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, -1, 1)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de E ?
- On pose $w_1 = (1, -1, 0)$ et $w_2 = (0, -1, 1)$. La famille (w_1, w_2) est-elle une base de E ?

- Un exemple de composition des applications linéaires

On note u l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 et $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 . On note v une autre application linéaire, de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^4 et de matrice

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^2 vue plus haut et à la base canonique

$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^4 .

- Peut-on définir la composée $u \circ v$?
- Peut-on définir la composée $v \circ u$?
- Montrer que la composée $v \circ u$ est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 .
- Quelle est la matrice C de cette application $v \circ u$ par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{R}^2 .
- Vérifier que $C = BA$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Un autre exemple de composition des applications linéaires

On note $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (0, 1)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 , $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On se donne l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 par les relations $f(e_1) = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$, $f(e_2) = 8\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ et $f(e_3) = \varepsilon_4$.

On se donne aussi une application linéaire g de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 par $g(\varepsilon_1) = (1, 1)$, $g(\varepsilon_2) = (0, 1)$, $g(\varepsilon_3) = (1, 0)$ et $g(\varepsilon_4) = (-1, -1)$.

- Quelle est la matrice M_f de f relativement aux bases (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$?
- Quelle est la matrice M_g de g relativement aux bases $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et (b_1, b_2) ?
- Quel est l'ensemble de départ de l'application $g \circ f$ et quel est son ensemble d'arrivée ?
- Calculer les images de $(g \circ f)(e_j)$ pour $j = 1, 2, 3$ dans la base (b_1, b_2) .
- En déduire la matrice $M_{g \circ f}$ relativement aux bases précédentes.
- Vérifier que $M_{g \circ f} = M_g M_f$.

- Trois vecteurs en dimension deux

On se donne une base (e_1, e_2) d'un espace vectoriel de dimension deux et u, v, w trois vecteurs de cet espace. On se propose de démontrer que ces trois vecteurs sont toujours liés.

a) Montrer que si l'un des trois vecteurs u, v, w est nul, alors la famille (u, v, w) est liée.

Si les trois vecteurs u, v, w sont non nuls, on suppose donné leur développement dans la base (e_1, e_2) : $u = \alpha e_1 + \beta e_2$, $v = \gamma e_1 + \delta e_2$ et $w = \varepsilon e_1 + \varphi e_2$.

b) On cherche des réels x, y, z de sorte que la combinaison linéaire $xu + yv + zw$ soit nulle. Montrer qu'alors les nombres y et z satisfont à la relation $(\alpha \delta - \beta \gamma)y - (\beta \varepsilon - \alpha \varphi)z = 0$.

c) Si $\alpha \delta - \beta \gamma = 0$, montrer que les deux vecteurs u et v sont liés. En déduire que les trois vecteurs u, v et w sont liés.

d) Si $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$, montrer que le choix $x = \gamma \varphi - \delta \varepsilon$, $y = \beta \varepsilon - \alpha \varphi$ et $z = \alpha \delta - \beta \gamma$ assure la relation $xu + yv + zw = 0$ avec $z \neq 0$. En conclure que la famille (u, v, w) est encore liée dans ce cas de figure.

- Trois sous-ensembles du plan

On se donne les trois sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants : $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \cos \theta, y = \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| = 1\}$. Pour chacun de ces trois ensembles, répondre aux deux questions suivantes.

a) Dessiner l'ensemble considéré.

b) L'ensemble étudié en a) est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?