

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 6 Droites et plans en dimension trois

- Complément d'algèbre linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F avec E de dimension finie et une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de E dans F . Alors $\ker u$, qui est un sous espace vectoriel de E est de dimension finie et $\text{Im } u$, sous espace vectoriel de F est également de dimension finie. De plus, on a l'égalité suivante entre les dimensions de ces espaces : $\dim(\ker u) + \dim(\text{Im } u) = \dim E$.

- Espace affine de dimension trois

On se donne un espace vectoriel E_3 sur \mathbb{R} de dimension trois (par exemple \mathbb{R}^3). On dispose donc de "vecteurs" $u \in E_3$ et de l'addition $u + v$ de deux vecteurs u et v de E_3 . Un espace affine \mathcal{E}_3 dirigé par E_3 (par exemple \mathbb{R}^3 à nouveau !) est un ensemble de "points" $A \in \mathcal{E}_3$ tels qu'il existe une addition $\mathcal{E}_3 \times E_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ qui à un couple (A, u) d'un point et d'un vecteur associe un et un seul point $B = A + u$. On doit avoir d'une part $A + 0 = A$ pour tout point A de \mathcal{E}_3 et d'autre part $(A + u) + v = A + (u + v)$ pour tous les points $A \in \mathcal{E}_3$ et tous les vecteurs u et v de l'espace vectoriel E_3 .

Avec des notations élémentaires, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = u$ à la place de $B = A + u$ et la relation $(A + u) + v = A + (u + v)$ est une reformulation de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

- Repère affine

On se donne un point $O \in \mathcal{E}_3$ et une base (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel E_3 . Alors le quadruplet $(O; e_1, e_2, e_3)$ est appelé repère affine de l'espace \mathcal{E}_3 . Pour tout point $M \in \mathcal{E}_3$, il existe des nombres uniques x_1, x_2 et x_3 de sorte que $M = O + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, relation que l'on peut écrire aussi $\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$.

- Droite affine dans un espace affine en dimension trois

On se donne un point $A \in \mathcal{E}_3$ et un vecteur non nul $u \in E_3$. La droite affine D contenant A et dirigée par la droite vectorielle $\Delta = \langle u \rangle = \{v \in E_3, \exists \theta \in \mathbb{R}, v = \theta u\}$ est par définition l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ qui peuvent s'écrire sous la forme $M = A + \theta u$ pour un certain nombre $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc $M \in D$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \theta u$.

Une droite affine est un sous-espace affine de \mathcal{E}_3 de dimension un.

Par exemple, on se donne un repère affine $(O; e_1, e_2, e_3)$ et trois nombres réels a, b et c . L'ensemble des points M dont les coordonnées (x_1, x_2, x_3) sont telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ de sorte que $x_1 = a + t, x_2 = b$ et $x_3 = c$ est une droite affine dirigée par la droite vectorielle $\langle e_1 \rangle$.

- Droite affine passant par deux points distincts

On se donne deux points A et $B \in \mathcal{E}_3$ non confondus, ce qui signifie que le vecteur \overrightarrow{AB} est non nul : $\overrightarrow{AB} \neq 0$. La droite notée simplement (AB) est la droite affine contenant le point A et dirigée par le vecteur \overrightarrow{AB} : $M \in (AB)$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AM} = \theta \overrightarrow{AB}$.

- Plan affine dans un espace affine de dimension trois

Un plan affine P est un sous espace affine de \mathcal{E}_3 de dimension deux.

On se donne un point $A \in \mathcal{E}_3$ et un plan vectoriel Π (sous espace vectoriel de E_3 de dimension deux) engendré par les vecteurs u et v de E_3 qui constituent par hypothèse une famille libre : $\Pi = \langle u, v \rangle$, espace vectoriel engendré par u et v . Le plan affine P contenant A et dirigé par Π est par définition l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ qui peuvent s'écrire sous la forme

$M = A + \theta u + t v$ pour la donnée de deux nombres réels θ et t . On a donc $M \in P$ si et seulement si il existe θ et $t \in \mathbb{R}$, de sorte que $\overrightarrow{AM} = \theta u + t v$.

Par exemple, dans un repère $(O; e_1, e_2, e_3)$, on dispose des trois plans affines nommés traditionnellement "xOy", "yOz" et "zOx", contenant l'origine et dirigés respectivement par les plans vectoriels $\langle e_1, e_2 \rangle$, $\langle e_2, e_3 \rangle$ et $\langle e_3, e_1 \rangle$.

- Plan affine passant par trois points non alignés

On se donne trois points A, B et C non alignés de l'espace affine \mathcal{E}_3 . D'un point de vue géométrique, on suppose d'abord que les points A et B sont distincts. De plus, le point C n'appartient pas à la droite (AB) . Ceci signifie signifie que la famille de deux vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. Le plan notée (ABC) est égal par définition au plan affine contenant le point A et dirigé par les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} : $M \in (ABC)$ si et seulement si il existe θ et $t \in \mathbb{R}$, tels que $\overrightarrow{AM} = \theta \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}$.

- Equation d'un plan affine dans l'espace de dimension trois

On se donne un repère affine $(O; i, j, k)$ de l'espace affine \mathcal{E}_3 et un plan affine P inclus dans \mathcal{E}_3 . Alors il existe trois réels non tous nuls $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et un réel d de sorte que M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O; i, j, k)$ appartient au plan P si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

La preuve de cette propriété consiste à écrire la relation $M = A + t u + \theta v$ pour un point A de coordonnées (α, β, γ) et deux vecteurs u et v de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) . De plus les deux vecteurs u et v forme un système libre et l'un des trois déterminants $u_1 v_2 - u_2 v_1$, $u_2 v_3 - u_3 v_2$, $u_3 v_1 - u_1 v_3$ est non nuls. Supposons $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ pour fixer les idées. Si le point courant $M \in P$ a pour coordonnées (x, y, z) , on en déduit $x = \alpha + t u_1 + \theta v_1$, $y = \beta + t u_2 + \theta v_2$, $z = \gamma + t u_3 + \theta v_3$. On multiplie la première relation par v_2 et la seconde par $-v_1$ et on additionne. Il vient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)t = v_2(x - \alpha) - v_1(y - \beta)$. Si on multiplie maintenant la première relation par $-u_2$ et la deuxième par u_1 , on obtient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)\theta = -u_2(x - \alpha) + u_1(y - \beta)$. On reporte ces résultats dans la troisième équation et il vient $(u_1 v_2 - u_2 v_1)(z - \gamma) = -(u_2 v_3 - u_3 v_2)(x - \alpha) - (u_3 v_1 - u_1 v_3)(y - \beta)$. Cette relation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = u_2 v_3 - u_3 v_2$, $b = u_3 v_1 - u_1 v_3$ et $c = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Avec l'hypothèse faite ici, on a $c \neq 0$ donc $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et le résultat est établi. \square

Réciproquement, si on se donne un repère affine $(O; i, j, k)$ de \mathcal{E}_3 , trois réels non tous nuls

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $d \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}_3$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O; i, j, k)$ qui satisfont à l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan affine.

La preuve consiste à caractériser les points de l'ensemble

$P = \{M \in \mathcal{E}_3, ax + by + cz + d = 0\}$. Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on peut par exemple supposer $a \neq 0$. Alors le point A de coordonnées $(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ appartient à l'ensemble P . On peut introduire deux vecteurs u et v dont les coordonnées sont solution de l'équation homogène $ax + by + cz = 0$. Par exemple u de coordonnées $(-b, a, 0)$ et v de coordonnées $(-c, 0, a)$. Ces deux vecteurs forment un système libre car si la combinaison linéaire $tu + \theta v$ est nulle, on a les relations $-(bt + c\theta) = 0$, $at = 0$ et $a\theta = 0$, donc les coefficients t et θ sont tous les deux nuls. On vérifie enfin que si le point M arbitraire appartient à l'ensemble P , on peut le décomposer sous la forme $M = A + tu + \theta v$. Or les trois composantes de cette relation s'écrivent $-(bt + c\theta) = x + \frac{d}{a}$, $at = y$ et $a\theta = z$. Les deux dernières relations fournissent les valeurs nécessaires des paramètres t et θ et la première s'écrit alors $-(b\frac{y}{a} + c\frac{z}{a}) = x + \frac{d}{a}$, qui redonne exactement l'équation initiale $ax + by + cz + d = 0$. La propriété est établie. \square

De plus, si le plan affine P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans le repère affine $(O; i, j, k)$, alors le plan vectoriel Π qui le dirige est caractérisé dans la base (i, j, k) par l'équation homogène associée $ax + by + cz = 0$.

- Intersection de deux plans affines dans l'espace de dimension trois

On se donne deux plans affines $P = A + \langle u, v \rangle$ et $P' = A' + \langle u', v' \rangle$ dans l'espace affine \mathcal{E}_3 . Si les deux plans directeurs $\Pi \equiv \langle u, v \rangle$ et $\Pi' \equiv \langle u', v' \rangle$ sont égaux, alors les plans P et P' sont parallèles. Leur intersection est vide si $A \notin P'$ et $P = P'$ dans le cas contraire.

Si les deux plans directeurs Π et Π' sont distincts, nous avons vu à la leçon précédente que l'intersection $\Pi \cap \Pi'$ est une droite vectorielle Δ , c'est à dire un sous-espace vectoriel de E_3 de dimension un. Alors l'intersection $P \cap P'$ est une droite affine D dirigée par la droite vectorielle Δ .

- Intersection d'une droite affine et d'un plan affine dans l'espace de dimension trois

On se donne un plan affine P dirigé par le plan vectoriel Π et une droite affine D dirigée par la droite vectorielle Δ .

Si la droite vectorielle Δ est incluse dans le plan vectoriel Π , la droite D est parallèle au plan affine P . Alors ou bien l'intersection $D \cap P$ est vide, ou bien la droite D est une droite affine incluse dans le plan P et $D \cap P = D$.

Si la droite vectorielle Δ n'est pas incluse dans le plan vectoriel Π , l'intersection $D \cap P$ est composée d'un unique point I .

- Intersection de deux droites affines dans l'espace de dimension trois

On se donne les droites affines $D = A + \langle u \rangle$ et $D' = A' + \langle u' \rangle$.

Si la famille de trois vecteurs $(u, u', \overrightarrow{AA'})$ est liée, les deux droites D et D' sont coplanaires ; leur intersection a été étudiée lors de la toute première leçon : droites concourrantes ou parallèles dans le plan.

Si la famille $(u, u', \overrightarrow{AA'})$ est libre, les droites ne sont pas coplanaires et leur intersection est vide.

- Structure euclidienne dans un espace vectoriel

On se donne un espace vectoriel E sur \mathbb{R} (de dimension quelconque, éventuellement égale à trois pour fixer les idées). Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur l'espace E : c'est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} qui au couple de vecteurs $(x, y) \in E \times E$ associe le nombre réel $x \cdot y$ le plus souvent noté (x, y) . Elle est linéaire à gauche : $(\alpha x + \beta x', y) = \alpha(x, y) + \beta(x', y)$ pour tout vecteur x, x' et y de E et tous les nombres α et β . Elle est linéaire à droite : $(x, \alpha y + \beta y') = \alpha(x, y) + \beta(x, y')$ pour tous les vecteurs x, y et y' de E et des nombres α et β arbitraires. Elle est symétrique : pour tout x et y vecteurs de E , $(y, x) = (x, y)$. Elle est positive : $(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Enfin, elle est définie : si $(x, x) = 0$, alors $x = 0$.

Par exemple, le produit scalaire "canonique" dans \mathbb{R}^3 est défini par $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$.

- Norme

Si x est un vecteur de E , le produit scalaire de x par lui-même est toujours positif ou nul. Par définition, la norme de x est la racine carrée du produit scalaire (x, x) : $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. C'est un nombre positif par définition du symbole de la racine carrée.

- Vecteurs orthogonaux

On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux lorsque le produit scalaire (x, y) est nul. On a alors le théorème de Pythagore : si $(x, y) = 0$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si x et y sont deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel euclidien E , on a toujours

$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. Ceci permet, si x et y ne sont pas nuls, d'introduire l'angle $\theta \in [0, \pi]$ des deux vecteurs *via* la relation $\cos \theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$. Dans le cas d'égalité, c'est à dire $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$, les vecteurs x et y sont colinéaires.

La preuve de ce résultat consiste à étudier la fonction $f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$ pour λ variant dans \mathbb{R} . On a en utilisant la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$f(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2(x, y) \lambda + \|x\|^2$. Comme ce polynôme du second degré est toujours positif, le discriminant associé est négatif et $(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. En cas d'égalité, le discriminant associé à la fonction polynomiale f est nul et on dispose donc d'une racine double λ_0 pour l'équation $f(\lambda) = 0$. On a donc $\|x + \lambda_0 y\|^2 = 0$ pour un certain $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Comme le produit scalaire est une forme définie, on en déduit que le vecteur $x + \lambda_0 y$ est nul : $x + \lambda_0 y = 0$ et les deux vecteurs x et y forment une famille liée.

- Inégalité triangulaire

Pour x et y deux vecteurs arbitraires de l'espace vectoriel euclidien E , on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- Base orthogonale, base orthonormée

Une base (e_1, \dots, e_n) de l'espace vectoriel euclidien E est orthogonale si et seulement si tous les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux : $(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Elle est orthonormée si de plus tous les vecteurs e_i sont unitaires, c'est à dire de norme unité : $\|e_i\| = 1$ pour tout i entre 1 et n .

- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

On se place pour fixer les idées dans l'espace euclidien E_3 de dimension trois. On se donne une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E . On peut la transformer en une base orthogonale (e_1, e_2, e_3) en suivant l'algorithme suivant. On pose tout d'abord $e_1 = \varepsilon_1$. Puis on cherche e_2 sous la forme $e_2 = \varepsilon_2 + \theta e_1$ et on détermine θ de sorte que $(e_1, e_2) = 0$. Enfin, on pose $e_3 = \varepsilon_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$ et on règle les valeurs des coefficients α et β pour que $(e_3, e_1) = (e_3, e_2) = 0$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt se poursuit pour les dimensions supérieures [exercice !].

- Espace affine euclidien de dimension trois

Un espace affine \mathcal{E}_3 dirigé par l'espace vectoriel E_3 est dit euclidien si un produit scalaire a été défini sur E_3 , c'est à dire si E_3 est lui-même euclidien. On dispose alors de la distance entre deux points : si A et B sont deux points de \mathcal{E}_3 , on pose $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$. On note le plus souvent cette distance AB lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Toutes les propriétés de la norme peuvent s'écrire pour la distance entre les points de \mathcal{E}_3 ; c'est un exercice laissé au lecteur.

Exercices

- Un plan affine

On se donne un repère affine de l'espace affine de dimension trois. Quelle est l'équation du plan qui passe par les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$? [$x + y + z = 1$]

- Un plan et une droite

On se donne les points A , B et C de l'espace affine de dimension trois par leurs coordonnées dans un repère affine : $A(-1, 6, 7)$, $B(2, 5, 8)$, $C(-3, 4, 0)$.

- Vérifier que les trois points A , B , C ne sont pas alignés. On appelle $P = (ABC)$ le plan affine qui contient ces trois points.
- Déterminer les équations paramétriques du plan P .
- Quelle est l'équation cartésienne du plan P ? [$x + 19y - 8z = 49$]
- Vérifier que les trois points A , B et C ont des coordonnées qui satisfont effectivement l'équation trouvée à la question précédente.

On se donne la droite affine D par ses équations paramétriques : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1-t \\ 2t \end{pmatrix}$ avec

$t \in \mathbb{R}$.

- Préciser les coordonnées d'un point de D ainsi qu'un vecteur directeur.
- La droite D est-elle parallèle au plan P ?
- Déterminer l'intersection de la droite D et du plan P . [$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -3)$].

- Deux droites

On se donne la droite D_1 par des équations cartésiennes : $x - 3 = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+9}{5}$ et la droite D_2

par la représentation paramétrique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 3s \\ 10 + 5s \\ -10 - 6s \end{pmatrix}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

- Préciser les coordonnées d'un point de D_1 ainsi qu'un vecteur directeur.

- b) Même question pour la droite D_2 .
- c) Prouver que les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.
- d) Montrer que D_1 et D_2 sont concourantes.
- e) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection. [[4, 5, -4]].
- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

On se donne une base orthonormée (i, j, k) d'un espace vectoriel euclidien E_3 de dimension 3.

Quelle base orthogonale (e_1, e_2, e_3) obtient-on si on part de la famille suivante de trois vecteurs

$$u_1 = (2, 0, 0), u_2 = (3, 1, 1), u_3 = (-1, 1, -1) \quad [e_2 = j + k, e_3 = j - k]$$