

## Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

### Cours 10

### Fonctions de deux variables réelles

- Quelques exemples de fonctions de deux variables réelles

Une fonction affine :  $\alpha(x, y) = ax + by + c$ , une fonction quadratique :  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , ou avec une racine carrée :  $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Une fonction à la fois fonction puissance et fonction exponentielle :  $h(x, y) = x^y$  et une fraction rationnelle :

$r(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $r(0, 0) = 0$ . Enfin une fonction singulière :

$s(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $s(0, 0) = 0$ .

- Ensemble de définition

Une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs réelles associe à tout couple  $(x, y)$  de réels un et un seul nombre  $f(x, y)$  si  $(x, y)$  appartient à son ensemble de définition  $D$ . Si  $(x, y) \notin D$ , alors le nombre  $f(x, y)$  n'existe pas.

Une fonction réelle d'ensemble de définition  $D \subset \mathbb{R}^2$  est une application de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ . A tout argument  $(x, y) \in D$ , on peut déterminer un et un seul nombre réel  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ . Ce nombre  $f(x, y)$  est l'image du point  $(x, y)$  par l'application  $f$ . On note souvent une fonction de la façon suivante  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  ou parfois sous la forme

$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  afin de condenser les deux notations.

Pour les exemples proposés ci-dessus, on a  $D_\alpha = \mathbb{R}^2$ ,  $D_f = \mathbb{R}^2$ ,  $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , disque fermé de centre l'origine et de rayon un. La détermination de  $D_h$  est un excellent exercice. Nous retenons ici que  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \subset D_h$ . On a enfin  $D_r = D_s = \mathbb{R}^2$ .

- Fonctions partielles

Une fonction de deux variables définit (au moins) une double infinité de fonctions à une variable. D'une part, si on se donne  $b \in \mathbb{R}$ , on dispose de la fonction  $x \mapsto f(x, b)$  de la première variable. D'autre part, si on se donne  $a \in \mathbb{R}$ , on peut définir une fonction  $y \mapsto f(a, y)$  de la seconde variable.

- Graphe

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  l'ensemble de définition d'une fonction  $f$  de deux variables réelles et à valeurs réelles. Le graphe de la fonction  $f$  est l'ensemble  $G$  des points de  $\mathbb{R}^3$  de la forme  $(x, y, f(x, y))$  avec  $(x, y)$  dans l'ensemble de définition  $D$ . On peut écrire aussi

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ .

On parle aussi de surface d'équation  $z = f(x, y)$  pour désigner le graphe de  $f$ . Dans le cas d'une fonction affine, cette surface est un plan.

- Lignes de niveau

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de deux variables et  $k$  un nombre réel, la ligne de niveau  $L_k$  est l'ensemble des points  $(x, y) \in D$  tels que  $f(x, y) = k$ .

Si  $k \neq m$ , les lignes de niveau  $L_k$  et  $L_m$  ne peuvent pas se couper.

- Dérivées partielles

On se donne une fonction  $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  de deux variables et un point  $(a, b)$  qui appartient à l'ensemble de définition de  $f$ . On dit que  $f$  admet une dérivée partielle au point  $(a, b)$  selon la première variable, notée  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ , si et seulement si la fonction partielle  $x \mapsto f(x, b)$  est dérivable au point  $a$ . On a :  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(a+t, b) - f(a, b)]$ .

De même, on dit que  $f$  admet une dérivée partielle au point  $(a, b)$  selon la deuxième variable, notée  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , si et seulement si la fonction partielle  $y \mapsto f(a, y)$  est dérivable au point  $b$ .

On a :  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} [f(a, b+\theta) - f(a, b)]$ .

Le calcul des dérivées partielles des fonctions proposées en exemple est un bon exercice. On a ainsi  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = a$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = b$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{g}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{g}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{y}{x} h$ ,  $\frac{\partial h}{\partial y} = (\log x) h$ ,  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $\frac{\partial r}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial r}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Le symbole  $\partial$  pour la dérivée partielle, appelé aussi "d rond", a été proposé par le mathématicien français Adrien Marie Legendre (1752–1833).

- Continuité

On se donne une fonction de deux variables  $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  et un point  $(a, b) \in D$ . On dit que  $f$  est continue au point  $(a, b)$  si et seulement si la fonction  $\varphi(u, v)$  définie par  $\varphi(u, v) = f(a+u, b+v) - f(a, b)$  tend vers zéro si le point  $(u, v)$  tend vers l'origine. Ainsi, pour toute erreur  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petite, on peut trouver un (petit) disque (non vide !) de rayon  $\eta > 0$  de sorte que si le point  $(x, y) \in D$  appartient au disque de centre  $(a, b)$  et de rayon  $\eta > 0$ , c'est à dire si la distance entre  $(x, y) \in D$  et  $(a, b)$  est inférieure à  $\eta$ , alors l'erreur  $|f(x, y) - f(a, b)|$  entre les valeurs prises par la fonction est inférieure (strictement) à  $\varepsilon$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in D, d((x, y), (a, b)) < \eta \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

Les fonctions  $\alpha$ ,  $f$  et  $g$  proposées dans les exemples plus haut sont continues en  $(0, 0)$ . Les fonctions  $h$  et  $s$  ne le sont pas (exercice !).

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en tout point  $(a, b) \in D$ , on dit qu'elle est continue sur  $D$ .

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $D$  et si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction composée  $(g \circ f)(x, y) \equiv g(f(x, y))$  est une fonction continue sur  $D$ .

- Différentiabilité

On se donne une fonction de deux variables  $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  et un point  $(a, b) \in D$ . On dit que  $f$  est différentiable au point  $(a, b)$  si la fonction  $f$  est "proche" d'une fonction affine au voisinage du point  $(a, b)$ .

Par exemple, si on choisit pour  $f$  un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à deux, expression de la forme  $f(x, y) = px + qy + r + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta xy + \frac{1}{2}\varepsilon y^2$ , on remarque d'abord que  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma a + \delta b$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta a + \varepsilon b$ . On peut aussi faire le calcul direct de  $f(a+u, b+v)$ , en remplaçant  $x$  par  $a+u$  et  $y$  par  $b+v$  :

$f(a+u, b+v) = f(a, b) + (p+\gamma a+\delta b)u + (q+\delta a+\varepsilon b)v + \frac{1}{2}\gamma u^2 + \delta uv + \frac{1}{2}\varepsilon v^2$ . On peut remplacer  $(p+\gamma a+\delta b)$  par  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  et  $(q+\delta a+\varepsilon b)$  par  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  dans l'expression précédente. On en déduit :  $f(a+u, b+v) = f(a, b) + [\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v] + \psi(u, v)$ . Dans notre cas de figure, la fonction "reste"  $\psi$  est une fonction polynômiale de degré deux :

$\psi(u, v) = (\frac{1}{2}\gamma u^2 + \delta uv + \frac{1}{2}\varepsilon v^2)$ . Cette fonction tend vers zéro plus vite que la norme  $\|(u, v)\| \equiv \sqrt{u^2+v^2}$ . La fonction  $f$  est donc bien approchée pour les points "voisins" de  $(a, b)$  par la fonction affine  $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto f(a, b) + [\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v]$ .

De manière générale, la fonction  $f$  est différentiable au point  $(a, b)$  si et seulement si il existe deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  et une fonction  $\varphi$  de deux variables qui tend vers zéro à l'origine de sorte que l'on a le développement suivant pour  $(x, y) = (a+u, b+v)$  et  $(u, v)$  tendant vers zéro :

$$f(a+u, b+v) = f(a, b) + \alpha u + \beta v + \|(u, v)\| \varphi(u, v).$$

Si  $f$  est différentiable au point  $(a, b)$ , elle a aussi des dérivées partielles en ce point. De plus, on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \alpha$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \beta$ .

Si  $f$  est différentiable au point  $(a, b)$ , son graphe  $G$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  qui admet un plan tangent au point  $(a, b, c = f(a, b))$ . Ce plan tangent a une équation qui s'obtient en tronquant le reste dans la définition de la différentielle :  $z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$ .

- Théorème : la différentiabilité entraîne la continuité

Si  $f$  est différentiable en  $(a, b) \in D$ , alors elle est continue en ce point. Par contre, l'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la différentiabilité, comme le montre la fonction  $s$  au point  $(0, 0)$  : les dérivées partielles  $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$  existent alors que la fonction  $s$  n'est pas continue à l'origine.

Si  $f$  est différentiable en tout point  $(a, b)$  de son ensemble de définition, on dit simplement que  $f$  est différentiable sur  $D$ .

- Dérivation des fonctions composées : un premier cas.

On se donne une fonction de deux variables  $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  définie sur  $D$  et deux fonctions  $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t)$  et  $\mathbb{R} \ni t \mapsto Y(t)$  de telle sorte que pour tout  $t$ ,  $(X(t), Y(t)) \in D$ . Alors la fonction composée  $g(t) = f(X(t), Y(t))$  est bien définie pour tout  $t$ .

Si  $f$  est continue sur  $D$  et si les fonctions  $X$  et  $Y$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction composée  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, si  $f$  est différentiable sur  $D$  et si les fonctions  $X$  et  $Y$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \frac{dY}{dt}$ .

- Exemple de dérivation de fonctions composées

La relation  $\frac{d}{dt}(f(X(t), Y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \frac{dY}{dt}$  se découvre par le calcul algébrique si on choisit par exemple une fonction  $f$  polynômiale de degré deux comme on a pu le faire plus haut :  $f(x, y) = px + qy + r + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta xy + \frac{1}{2}\varepsilon y^2$ . On sait que de façon générale,  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma a + \delta b$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta a + \varepsilon b$ . Donc en particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) = p + \gamma X(t) + \delta Y(t) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) = q + \delta X(t) + \varepsilon Y(t).$$

La fonction composée  $g(t)$  a donc pour expression :

$g(t) = pX(t) + qY(t) + r + \frac{1}{2}\gamma X(t)^2 + \delta X(t)Y(t) + \frac{1}{2}\varepsilon Y(t)^2$ . On la dérive avec les règles usuelles qui permettent de prendre en compte les fonctions composées à une variable :

$\frac{dg}{dt} = p \frac{dX}{dt} + q \frac{dY}{dt} + \gamma X(t) \frac{dX}{dt} + \delta (X(t) \frac{dY}{dt} + \frac{dX}{dt} Y(t)) + \varepsilon Y(t) \frac{dY}{dt}$ . On factorise  $\frac{dX}{dt}$  et  $\frac{dY}{dt}$  :  
 $\frac{dg}{dt} = \left( p + \gamma X(t) + \delta Y(t) \right) \frac{dX}{dt} + \left( q + \delta X(t) + \varepsilon Y(t) \right) \frac{dY}{dt}$ . On peut donc, compte tenu du calcul fait plus haut, réécrire cette expression sous la forme  $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \frac{dY}{dt}$ . Et l'expression que nous venons d'obtenir est en fait très générale.

- Dérivation des fonctions composées : un second cas

On se donne une fonction de deux variables  $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  et deux autres fonctions de deux variables  $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \mapsto X(u, v) \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \mapsto Y(u, v) \in \mathbb{R}$  de sorte que pour tout  $(u, v) \in \Delta$ ,  $(X(u, v), Y(u, v)) \in D$ . Alors la fonction composée  $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$  est bien définie sur  $\Delta$ .

Si  $f$  est continue sur  $D$  et si les fonctions  $X$  et  $Y$  sont continues sur  $\Delta$ , alors la fonction composée  $g$  est une fonction de deux variables continue sur  $\Delta$ .

De plus, si  $f$  est différentiable sur  $D$  et si les fonctions  $X$  et  $Y$  sont différentiables sur  $\Delta$ , alors la fonction composée  $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$  est différentiable sur  $\Delta$  et les dérivées partielles se calculent comme suit :  $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u}$  et  $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v}$ .

Afin d'alléger l'écriture, nous avons omis d'explicitier les arguments des différentes fonctions dans les deux relations précédentes. Sauriez-vous les rétablir ?

## Exercices

- Ensembles de définition [d'après Nathalie Zanon]

Déterminer et dessiner les ensembles de définition pour les fonctions suivantes

a)  $f_1(x) = \frac{\ln(y-x)}{x}$   
 b)  $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

- Lignes de niveau

Dessiner les lignes de niveau  $L_1$ ,  $L_{-1}$  et  $L_0$  de la fonction  $f(x) = xy$ .

- Dérivées partielles [d'après Nathalie Zanon]

On se donne les deux fonctions suivantes :  $f_1(x) = 4x^3 + 4xy^2 + x^2 + y^2 - 4x$  et  $f_2(x) = \exp(x^2 - 3xy + 2y^2)$ . Pour chacune de ces fonctions  $f$ , répondre aux questions suivantes.

- Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  d'ordre un.
- Évaluer les dérivées partielles d'ordre deux  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .
- Que remarquez-vous ?

- Une fonction quelque peu singulière

On définit la fonction  $s(x, y)$  par les relations suivantes :  $s(0, 0) = 0$  et  $s(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

- Quel est l'ensemble de définition de  $s$  ?
- Calculer  $s(x, 0)$  et  $s(0, y)$  pour tout nombre réel  $x$  et tout nombre réel  $y$ .
- En déduire, en se ramenant à la définition d'une dérivée partielle, que la fonction  $s$  admet deux dérivées partielles  $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0)$  à l'origine, qu'on calculera.

- d) Calculer  $s(x, x^2)$  lorsque  $y = x^2$  pour tout nombre réel  $x$ .  
 e) En déduire que la fonction  $s$  n'est pas continue à l'origine.

• Méthode des caractéristiques

On se donne un nombre réel  $a \in \mathbb{R}$  et une fonction dérivable  $u_0$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On cherche une fonction inconnue  $u(x, t)$  de deux variables qui satisfait d'une part à l'équation d'advection, c'est à dire  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$  et d'autre part à la condition initiale

$u(x, 0) = u_0(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par ailleurs, pour  $y \in \mathbb{R}$  fixé, on pose  $v(t) = u(at + y, t)$ .

- a) Montrer que si la fonction  $u$  est solution de l'équation d'advection, alors la dérivée  $\frac{dv}{dt} = 0$ .  
 b) En déduire que pour tout  $y \in \mathbb{R}$  et pour tout  $t \geq 0$ ,  $u(at + y, t) = u_0(y)$ .  
 c) En déduire que toute solution différentiable de l'équation  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  qui satisfait aussi à la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  est nécessairement de la forme  $u(x, t) = u_0(x - at)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .

d) Vérifier par un calcul élémentaire que la fonction  $u$  définie par  $u(x, t) = u_0(x - at)$  est effectivement solution du problème formé d'une part de l'équation d'advection  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  (pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ ) et d'autre part de la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  (pour  $x \in \mathbb{R}$ ).

• Noyau de l'équation de la chaleur

On se donne  $\sigma > 0$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$  on pose  $\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{x^2}{4\sigma^2 t})$ .

Vérifier que la fonction  $\varphi$  est solution de l'équation de la chaleur à une dimension spatiale :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0.$$

• Méthode de d'Alembert pour l'équation des ondes

On cherche à déterminer l'expression générale d'une fonction  $f(x, y)$  régulière solution de l'équation des ondes :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . On pose  $u = x + y$ ,  $v = x - y$  et on introduit la fonction  $g(u, v)$  définie par  $g(u, v) = f(x, y)$ .

- a) Vérifier que si la fonction  $f$  est de la forme  $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$ , elle est bien solution de l'équation des ondes.  
 b) Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  en fonction des dérivées partielles de la fonction  $g$ .  
 c) Exprimer la combinaison  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  en fonction des dérivées partielles de la fonction  $g$ .  
 d) Résoudre par intégrations successives l'équation obtenue.  
 e) En déduire qu'une solution générale  $f(x, y)$  de l'équation des ondes peut se décomposer sous la forme  $f(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$ , où les fonctions d'une seule variable  $\varphi$  et  $\psi$  sont arbitraires.