le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 13 Changement de variable dans une intégrale double

- Changement de variable dans une intégrale double : premiers pas

On se donne pour fixer les idées le carré unité $K = [0, 1] \times [0, 1]$ et deux réels strictement positifs a et b. Avec la transformation linéaire F définie par $x = a\,\xi$, $y = b\,\eta$, le carré unité se transforme en un rectangle $Q = [0, a] \times [0, b]$ (voir la Figure 1). Si on intègre la fonction $f \equiv 1$ dans le rectangle Q, on trouve $|Q| = \int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab$ alors que si on intègre cette même fonction $f \equiv 1$ dans le carré K, on trouve $|K| = \int_K \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 1$. On introduit la matrice (constante) J_F de l'application linéaire F : $J_F = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det J_F$ vaut ab et on constate qu'on a $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_K |\det J_F|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$. Nous voyons apparaître la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne du changement de coordonnées.

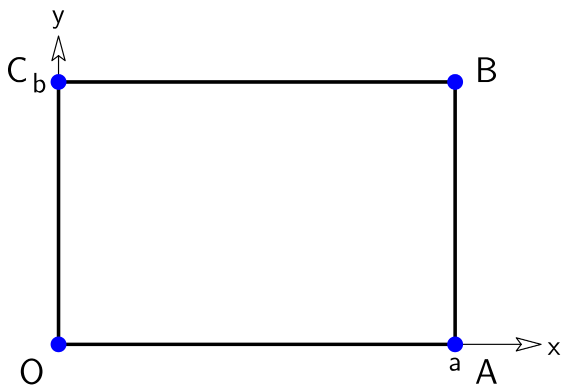

Figure 1. Rectangle à côté parallèle aux axes

- Changement de variable dans une intégrale double : un premier parallélogramme

On transforme la carré unité K avec une transformation linéaire F définie maintenant par $x = a\,\xi + c\,\eta$, $y = b\,\eta$. Alors le carré unité se transforme en un parallélogramme Q dont on peut donner les coordonnées des quatre sommets : $\mathrm{O}(0, 0)$ $[\xi = \eta = 0]$,
$\mathrm{A}(a, 0)$ $[\xi = 1, \eta = 0]$, $\mathrm{B}(a + c, b)$ $[\xi = \eta = 1]$ et $\mathrm{C}(c, b)$ $[\xi = 0, \eta = 1]$. La surface du parallélogramme Q est égale a sa base multipliée par la hauteur, soit ab. Par ailleurs, la matrice J_F de l'application linéaire F vaut maintenant $J_F = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det J_F$ vaut toujours ab et on a encore $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_K |\det J_F|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$.

François Dubois, mai 2023.

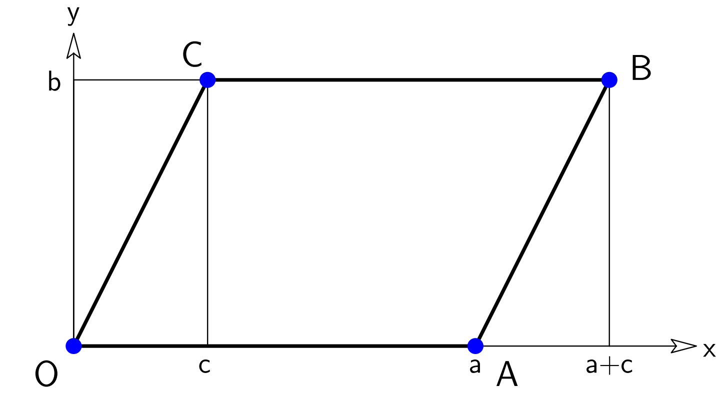

Figure 2. Parallélogramme : premier cas simple

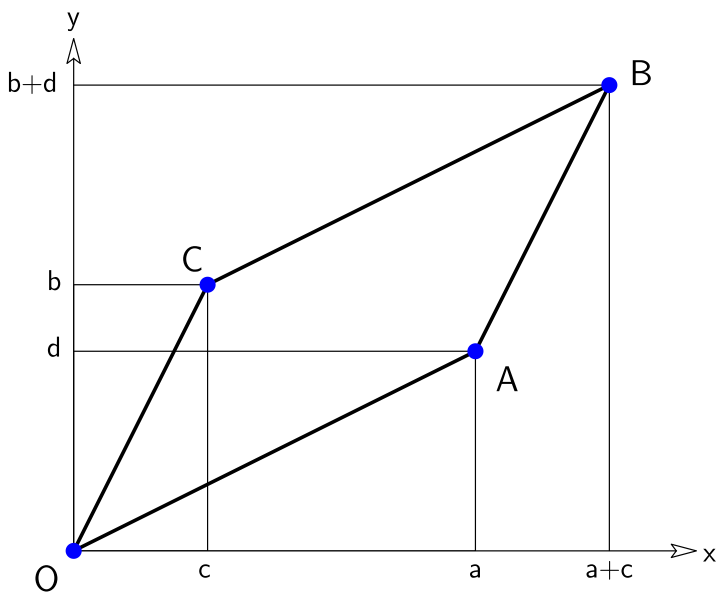

Figure 3. Parallélogramme : second cas

- Changement de variable dans une intégrale double : un second parallélogramme

On pose maintenant le changement de variables $(\xi, \eta) \longmapsto (x, y)$ *via* l'application linéaire F définie par $x = a\xi + c\eta$, $y = d\xi + b\eta$, avec a, b, c et d strictement positifs pour fixer les idées. Alors le carré unité K se transforme en un autre parallélogramme Q. Les coordonnées de ses quatre sommets sont les suivantes : $\mathrm{O}(0, 0)$ $[\xi = \eta = 0]$, $\mathrm{A}(a, d)$ $[\xi = 1, \eta = 0]$,
$\mathrm{B}(a+c, b+d)$ $[\xi = \eta = 1]$ et $\mathrm{C}(c, b)$ $[\xi = 0, \eta = 1]$. Si le quadrangle $OABC$ a une orientation directe (il tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) [nous conseillons au lecteur de faire un dessin !], alors la surface du parallélogramme Q se calcule avec une approche graphique [exercice !] et on a $|Q| = ab - dc$. Si le quadrangle $OABC$ a une orientation rétrograde [nous conseillons au lecteur de faire un autre dessin !], alors on voit que $|Q| = -ab + dc$. Dans tous les cas, $|Q| = |ab - dc|$. La matrice J_F de l'application linéaire F vaut maintenant $J_F = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ et $\det J_F = ab - dc$. On remarque que pour calculer la surface de ce second parallélogramme, il

suffit d'écrire $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_K |\det J_F|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$.
Nous retenons que la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne du changement de coordonnées permet de calculer la surface du parallélogramme. Ce résultat se généralise [exercice !] si on remplace le carré unité par tout autre carré de côté $\Delta x > 0$.

- Changement de variable dans une intégrale double : quadrangle curviligne

On transforme le carré unité $K = [0, 1] \times [0, 1]$ avec une application non linéaire Φ qu'on suppose de classe C^1, bijective de K sur $Q = \Phi(K)$ et on suppose l'application réciproque Φ^{-1} continue de Q sur K. On découpe le carré K en $N \times N$ petits carrés $K_{i,j}$ de côté $\Delta x = \frac{1}{N}$: $K_{i,j} = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, avec $\xi_i = (i-1)\,\Delta x$ et $\eta_j = (j-1)\,\Delta x$. On introduit les points $M_{i,j} = \Phi(\xi_i, \eta_j)$ et les quadrangles $Q_{i,j} = \Phi(K_{i,j})$. On a alors $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1\leq i,\,j\leq N} \int_{Q_{i,j}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ $= \sum_{1\leq i,\,j\leq N} \int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On approche l'application Φ dans le carré $K_{i,j}$ par une application affine tangente $F_{i,j}$ au point (ξ_i, η_j) :
$\Phi(\xi, \eta) \approx F_{i,j}(\xi, \eta) \equiv \Phi(\xi_i, \eta_j) + \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j).(\xi - \xi_i, \eta - \eta_j)$. Alors on peut approcher avec une bonne précision l'aire du quadrangle curviligne $Q_{i,j}$ par celle du parallélogramme $P_{i,j} = F_{i,j}(K_{i,j})$ obtenu en remplaçant Φ par $F_{i,j}$: $\int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \int_{P_{i,j}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Mais on a vu que pour un parallélogramme $P_{i,j}$ quelconque, on a $\int_{P_{i,j}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{K_{i,j}} |\det J_{F_{i,j}}|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$. Dans le cas présent, $J_{F_{i,j}} = \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j)$ et on a $\int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{1\leq i,\,j\leq N} \int_{K_{i,j}} |\det \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$.
Si l'entier N tend vers l'infini, la somme du membre de droite de la dernière expression converge vers $\int_K |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$ et on a finalement
$|Q| = \int_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_K |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$.

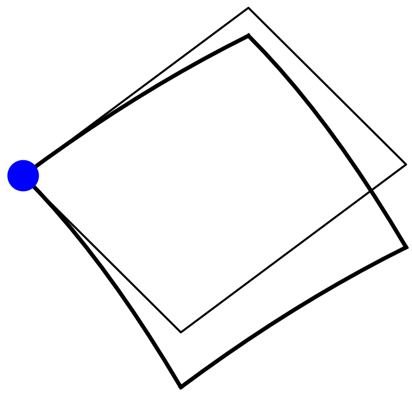

Figure 4. Autour du point $M_{i,j} = \Phi(\xi_i, \eta_j)$ (en bleu), le quadrangle curviligne $Q_{i,j}$ (en trait fort) est bien approché par le parallélogramme $P_{i,j}$ (en traits fins) associé à l'application affine tangente $F_{i,j}$ si on a suffisamment découpé le carré initial.

- Changement de variable dans une intégrale double : cas général

Comme ci-dessus, on transforme le carré unité $K = [0, 1] \times [0, 1]$ avec une fonction non linéaire Φ de classe C^1, bijective de K sur $Q = \Phi(K)$ et l'application réciproque est supposée continue de Q sur K. On se donne maintenant une fonction f intégrable au sens de Riemann dans Q et on cherche à écrire l'intégrale $\int_Q f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec une intégrale dans le carré K.

On reprend les notations du paragraphe précédent et on pose $f_{i,j} = f(\Phi(\xi_i, \eta_j))$: c'est une approximation de la fonction f dans le (petit) quadrangle curviligne $Q_{i,j}$. On a alors
$\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{1\leq i, j\leq N} \int_{Q_{i,j}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{1\leq i, j\leq N} \int_{\Phi(K_{i,j})} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Pour chaque quadrangle curviligne $Q_{i,j}$, on a $\int_{\Phi(K_{i,j})} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \approx f_{i,j} \int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et on a vu au paragraphe précédent que $\int_{\Phi(K_{i,j})} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \approx \int_{P_{i,j}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{K_{i,j}} |\det \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. On en déduit que $\int_{\Phi(K_{i,j})} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \approx \sum_{1\leq i, j\leq N} \int_{K_{i,j}} f(\Phi(\xi_i, \eta_j))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi_i, \eta_j)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Si l'entier N tend vers l'infini, cette dernière somme converge vers l'intégrale
$\int_K f(\Phi(\xi, \eta))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. On en déduit la forme finale de la formule de changement de variable dans une intégrale double :
$\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K f(\Phi(\xi, \eta))\, |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$. Le tout est de ne pas oublier le jacobien $J(\xi, \eta) \equiv |\det \mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)|$, valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne des dérivées partielles $\mathrm{d}\Phi(\xi, \eta)$!
On admet que le résultat précédent se généralise au cas d'un ouvert quelconque K de $\mathbb{R}^n$ pour un entier n quelconque ≥ 1 et une fonction f mesurable sur $Q = \Phi(K)$ et intégrable sur Q, c'est à dire telle que $\int_Q |f(x, y)|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$.
A titre d'exercice, le lecteur peut chercher à retrouver la formule "usuelle" de changement de variable dans le cas de la dimension un comme cas particulier de la relation précédente !

- Coordonnées polaires dans le plan

Les variables ξ et η sont notées r et θ et l'application Φ de changement de variable $(r, \theta) \longmapsto (x, y)$ est définie par $x = r \cos\theta$ et $y = r \sin\theta$. La matrice jacobienne de cette transformation peut se calculer sans difficulté particulière et on a, si on suppose $r > 0$:
$J(r, \theta) = r$. On a alors $\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K f(r \cos, r \sin\theta)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ lorsque $Q = \Phi(K)$.

Exercices

- Domaine circulaire

a) On se donne $R > 0$. Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Calculer l'intégrale double $I = \iint_D x^3\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.
b) Même question avec l'intégrale qui s'écrit avec la même expression algébrique mais dans le domaine $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$: $I_+ = \iint_{D_+} x^3\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. $[0,\ \frac{4}{105} R^7]$

- Domaine elliptique

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux longueurs fixées. On note D l'intersection de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec le premier quadrant $Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
a) Dessiner l'ensemble D.
b) Effectuer un changement de variables non banal pour transformer l'intégrale double $I = \iint_D x\, y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.
c) En déduire la surface $|D|$ du quart de domaine elliptique D.
d) Achever le calcul de l'intégrale I. $[\frac{1}{4}\pi ab,\ \frac{1}{8} a^2\, b^2]$

- Intégrale dans un quadrilatère

On se donne $a > 0$. On s'intéresse au domaine Ω caractérisé par les inégalités $x \leq y \leq x+a$ et $a \leq y \leq 2a$. On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

a) Montrer qu'on peut écrire $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \leq x+a, a \leq y \leq 2a\}$.

b) Dessiner l'ensemble Ω.

On se propose de transformer l'intégrale I à l'aide du changement de variable $u = y$, $v = y - x$.

c) Montrer que $(x,y) \in \Omega$ si et seulement si $a \leq u \leq 2a$ et $0 \leq v \leq a$.

d) Exprimer les variables x et y en fonction de u et v.

e) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$.

f) En déduire l'expression du jacobien de la transformation $(u,v) \longmapsto (x,y)$.

g) Achever le calcul et montrer que $I = \frac{7}{2}a^4$.

- Entre paraboles et hyperboles

On appelle P_k la parabole d'équation $y = kx^2$ et H_ℓ l'hyperbole d'équation $xy = \ell$.

a) Dessiner les paraboles P_2 et P_3.

b) Sur le même graphe, dessiner les hyperboles H_1 et H_2.

On note D l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ compris entre les paraboles P_2 et P_3 d'une part et entre les hyperboles H_1 et H_2 d'autre part : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 2, 2x^2 \leq y \leq 3x^2\}$.

c) Montrer que l'ensemble D n'est pas vide.

d) Représenter graphiquement l'ensemble D.

Afin de calculer la surface $|D|$ de l'ensemble D, on se propose d'évaluer l'intégrale $|D| = \int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On se propose de transformer cette intégrale à l'aide du changement de variable $u = xy$, $v = \frac{y}{x^2}$.

e) Montrer que $(x,y) \in D$ si et seulement si $1 \leq u \leq 2$ et $2 \leq v \leq 3$.

f) Exprimer x et y en fonction de u et v.

g) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$.

h) En déduire le jacobien de la transformation $(u,v) \longmapsto (x,y)$.

i) Montrer que $|D| = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3}{2}\right)$, où $\log$ désigne le logarithme naturel.