

Devoir 3

à rendre pour la séance numéro 10, le 11 avril 2023

Projection orthogonale sur un plan affine

On se donne un repère orthonormé $(O; e_1, e_2, e_3)$ de l'espace affine euclidien orienté \mathcal{E}_3 . On considère le plan affine P d'équation $x + y + z = 1$. On introduit le plan vectoriel Π qui dirige le plan affine P .

- 1) Montrer que le point A de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ appartient à P .
- 2) Montrer que le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$ est un vecteur unitaire de Π .
- 3) Montrer que le vecteur $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3)$ appartient au plan vectoriel Π , est unitaire et est orthogonal à ε_1 .
- 4) Calculer les composantes du vecteur $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$.
- 5) Quelle est la matrice de passage R entre les deux bases orthonormées (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
- 6) Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $(O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
- 7) Montrer que si un point M appartient au plan P , il existe deux réels α et β de sorte que $M = A + \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2$.

On se propose de projeter orthogonalement le point B , de coordonnées $(2, 3, 4)$ dans le repère $(O; e_1, e_2, e_3)$, sur le plan affine P . Pour cela, on cherche un point Q du plan P dont la distance euclidienne de B à Q est toujours plus petite que la distance euclidienne de B à tout point M de P : $Q \in P$ et $\forall M \in P, d(B, Q) \leq d(B, M)$.

- 8) Le point B appartient-il au plan P ?
- 9) Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $(O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
- 10) En utilisant le repère $(O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, exprimer la valeur du carré de la distance euclidienne $d(B, M)$ en fonction de α et β .
- 11) Montrer que l'expression $(d(B, M))^2$ est minimale pour une valeur du couple (α, β) que l'on précisera.
- 12) En déduire les coordonnées (dans le repère $(O; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$) du point $Q \in P$ qui minimise la distance $d(B, M)$ pour tous les points M du plan P .
- 13) Que vaut la distance euclidienne $d(B, Q)$ entre les points B et Q ?
- 14) Quelles sont les coordonnées du point Q dans le repère initial $(O; e_1, e_2, e_3)$?
- 15) On introduit la droite affine D passant par B et de vecteur directeur ε_3 . Montrer que le point Q étudié dans les questions précédentes est aussi le point d'intersection de la droite D et du plan P .