le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire (MVA006)

Devoir 4
à rendre pour la séance numéro 13, le 23 mai 2023

Expression du laplacien en coordonnées polaires

On se donne un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\, e_1\,,\, e_2)$ du plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$. Un point M arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes $x,\, y$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\, e_1\, e_2)$ de sorte que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x\, e_1 + y\, e_2$. Il a aussi des coordonnées polaires $(r,\, \theta)$ de sorte que $x = r\, \cos\theta$ et $y = r\, \sin\theta$.

On se donne une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le laplacien Δf de la fonction f est la fonction de deux variables définie par $\Delta f(x,\, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1) Calculer le laplacien dans le cas particulier de la fonction $f_0(x,\, y) = x^2 + y^2$.

2) Sachant que $r^2 = x^2 + y^2$, montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial x}$ et $\frac{\partial r}{\partial y}$ sont respectivement égales à $\frac{x}{r} = \cos\theta$ et $\frac{y}{r} = \sin\theta$.

3) De même, partant de la relation $\tan\theta = \frac{y}{x}$, montrer que l'on a $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r}\, \sin\theta$ et $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r}\, \cos\theta$.

On exprime une fonction régulière arbitraire f à l'aide des coordonnées polaires ; on pose $g(r,\, \theta) = f(r\, \cos\theta,\, r\, \sin\theta)$.

4) Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial\theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5) En déduire les relations : $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\, \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\, \sin\theta\, \frac{\partial g}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\, \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \cos\theta\, \frac{\partial g}{\partial\theta}$.

6) Afin de dériver une nouvelle fois par rapport à x la première expression et par rapport à y la seconde, montrer en utilisant certaines des relations précédentes pour les fonctions $f_1(x,\, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_2(x,\, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $f_3(x,\, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f_4(x,\, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, que l'on a les quatre relations suivantes : $\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta) = \frac{1}{r}\, \sin^2\theta$, $\frac{\partial}{\partial x}\big(-\frac{1}{r}\, \sin\theta\big) = \frac{2}{r^2}\, \sin\theta\, \cos\theta$, $\frac{\partial}{\partial y}(\sin\theta) = \frac{1}{r}\, \cos^2\theta$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{1}{r}\, \cos\theta\big) = -\frac{2}{r^2}\, \sin\theta\, \cos\theta$.

7) A partir des relations $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos\theta\, \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r}\, \sin\theta\, \frac{\partial g}{\partial\theta}\big)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(\sin\theta\, \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \cos\theta\, \frac{\partial g}{\partial\theta}\big)$, de la règle de dérivation d'un produit et des relations proposées à la question 6), en déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et fonction de $r,\, \theta,\, \frac{\partial g}{\partial r},\, \frac{\partial g}{\partial\theta},\, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2},\, \frac{\partial^2 g}{\partial r\, \partial\theta}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$. Attention, chacun des résultats pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ comporte cinq termes !

8) Déduire de la question précédente que $\Delta f(x,\, y) = \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial r}\big(r\, \frac{\partial g}{\partial r}\big) + \frac{1}{r^2}\, \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$.

François Dubois, 09 mai 2023.