le cnam Analyse et Calcul Matriciel

Cours 1 Suites numériques

- Quelques exemples

  $1, 1, 1, 1, \ldots$
  $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
  $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
  $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
  $0, 0.3, 0.33, 0.333, \ldots$
  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

- Notation et définition

Une suite réelle $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pour tout entier n, on est capable de calculer de façon unique la valeur du nombre réel u_n.
La définition d'une suite complexe est analogue ; cette fois, $u_n \in \mathbb{C}$ pour tout entier n.
Suite définie à l'aide d'une formule $u_n = f(n)$ et suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$. Chacun des six exemples précédents relève-t-il de l'une de ces deux catégories ?

- Théorème fondamental des suites réelles ($u_n \in \mathbb{R}$)

On suppose que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier naturel n. On suppose aussi qu'elle est majorée : il existe un réel A tel que pour tout entier n, on a la majoration $u_n \leq A$ [avec les symboles de la logique : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$]. Alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si n tend vers $+\infty$.

- Un exemple classique : quelle est la limite de $u_n \equiv \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour n tendant vers $+\infty$?

- Suite arithmétique

Par définition d'une suite arithmétique, il existe un nombre a (appelé la raison de la suite) tel que pour tout entier n, on a la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + a$.
Les six exemples présentés plus haut sont-ils (ou pas) des exemples de suite arithmétique ?
Formule explicite de calcul d'une suite arithmétique : $u_n = u_0 + n\,a$.
Somme des termes d'une suite arithmétique. On somme les $n+1$ premiers termes de la suite et on obtient ainsi la somme $S_n \equiv u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. On peut aussi définir la somme des $n+1$ premiers termes avec la condition initiale $S_0 = u_0$ et la relation de récurrence $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. On prouve par récurence qu'on a $S_n = (n+1)\,u_0 + \frac{n\,(n+1)}{2}\,a$.

- Suite géométrique

Par définition d'une suite géométrique, il existe un nombre q (la raison de la suite) tel que pour tout entier n, on a la relation de récurrence $u_{n+1} = q\,u_n$.
Les six exemples présentés plus haut sont-ils (ou pas) des exemples de suite géométrique ?
On peut calculer les valeurs d'une suite géométrique avec une formule explicite : $u_n = u_0\,q^n$.

- Limite d'une suite géométrique si $u_0 = 1$. Si $q > 1$, alors $u_n = q^n$ tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$. Si $|q| < 1$, $u_n = q^n$ tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

François Dubois et Chloé Mimeau, 28 septembre 2016.