

Cours 3 Séries numériques réelles et complexes

- Quelques exemples

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (\text{série harmonique alternée})$$

$$\exp(i\alpha) + \frac{1}{2}\exp(2i\alpha) + \frac{1}{3}\exp(3i\alpha) + \dots \quad (\text{une première série de Fourier})$$

- Théorème fondamental : la convergence absolue entraîne la convergence.

On suppose que le terme général u_n de la série est un nombre réel de signe quelconque (ou un nombre complexe). Si la série de terme général $|u_n|$ converge, alors la série de terme général u_n converge : il existe un nombre réel (ou complexe) ℓ tel que la suite S_n des sommes partielles ($S_n \equiv u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$) converge vers ℓ si l'entier n tend vers l'infini.

Donc la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ si $n \geq 1$ (troisième exemple) converge.

- Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des séries convergentes.

Soient u_n et v_n deux séries convergentes réelles (ou complexes). Alors la série somme ($w_n = u_n + v_n$) est également convergente. Si on multiplie u_n par le nombre réel (ou complexe) fixé λ , alors la série de terme général $z_n = \lambda u_n$ est également convergente.

Conséquence : si u_n est une série convergente et v_n une série divergente, alors la somme $w_n = u_n + v_n$ est le terme général d'une série divergente.

- Série semi-convergente

Une série semi-convergente est une série convergente (la suite S_n des sommes partielles converge dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) si n tend vers l'infini) telle que la série $|u_n|$ des valeurs absolues diverge.

- Série réelle alternée

On suppose que le terme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n a_n$, où a_n est une suite réelle positive, décroissante et tendant vers zéro si l'entier n tend vers l'infini : $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série de terme général u_n converge.

Donc la série harmonique alternée du quatrième exemple ($u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ si $n \geq 1$) converge.

- Une série dont la somme reste bornée

Le second exemple où la somme partielle peut s'écrire $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\alpha}$ diverge. Toutefois la somme S_n reste bornée si α est réel tel que $\sin(\frac{\alpha}{2}) \neq 0$ et on a $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\alpha}{2})|}$.

- Transformation d'Abel (séries alternées généralisées)

On suppose que le terme général u_n de la série peut s'écrire sous la forme $u_n = a_n b_n$, avec les hypothèses suivantes : (i) les sommes $B_n \equiv b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}$ restent bornées pour tout n , (ii) la suite a_n est positive, décroissante et tend vers zéro si n tend vers l'infini. Alors la série de terme général u_n converge. Donc la série de terme général $\frac{1}{n} e^{in\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) proposée au quatrième exemple converge.