# le cnam — Analyse et Calcul Matriciel

## Cours 5 Séries de fonctions

- Quelques exemples

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{inx},\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{(série de Fourier)}$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\,x^n,\ x \in \mathbb{C} \qquad \text{(fonction exponentielle)}$$

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x},\ x \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,x > 1 \qquad \text{(série de Riemann)}$$

- Convergence simple

La série de fonctions $u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x$ appartenant à un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ ou un domaine $\Omega$ de $\mathbb{C}$, avec $u_n(x) \in \mathbb{R}$ ou $u_n(x) \in \mathbb{C}$, converge simplement vers une fonction $S$ de $I$ ou de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si pour tout $x \in I$ ou $\Omega$, la suite numérique $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ converge vers le nombre $S(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ si l'entier $n$ tend vers $+\infty$.

- Convergence uniforme

La série de fonctions $u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x$ appartenant à un intevalle $I$ de $\mathbb{R}$ ou une partie $\Omega$ de $\mathbb{C}$ convergence uniformément vers la fonction $S$ de $I$ ou de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que pour tout entier $n \geq N$ et pour tout réel $x \in I$ ou tout complexe $x \in \Omega$, on a $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

- Convergence normale

On dit que la série de fonctions $u_n(x)$ converge normalement sur $I$ ou sur $\Omega$ si il existe une série $a_n$ à termes positifs convergente telle que pour tout réel $x \in I$ ou tout complexe $x \in \Omega$, on a $|u_n(x)| \leq a_n$.

Soit $R > 0$ fixé et $D_R$ le disque fermé de centre l'origine et de rayon $R$: $D_R = \{x \in \mathbb{C},\ |x| \leq R\}$.

La fonction exponentielle $\mathrm{e}^x$ (second exemple) converge normalement dans le disque $D_R$.

Soit $\alpha > 1$ et $\Gamma_\alpha$ le demi plan fermé des complexes de partie réelle supérieure ou égale à $\alpha$: $\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,x \geq \alpha\}$. Alors la série de Riemann $\zeta(x)$ (troisième exemple) converge normalement dans le demi plan $\Gamma_\alpha$.

- La convergence normale entraîne la convergence absolue.
- Théorème. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.
- Continuité de la limite uniforme

Si la série de fonctions $u_n(x)$ continues converge uniformément sur l'intervalle $I$ ou dans le domaine $\Omega$, alors la somme $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ est continue.

- Dérivation terme à terme

On se donne une série de fonctions $u_n(x)$ dérivables sur l'intervalle $I$. On suppose qu'elle converge simplement vers la fonction $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. On suppose de plus que la série des

---

François Dubois et Chloé Mimeau, 26 octobre 2016.

fonctions dérivées $\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}(x)$ converge uniformément sur $I$ vers une fonction $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}(x)$. Alors la somme $S$ est dérivable et $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = g(x)$ : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}(x)$.
La série dérivée de la fonction exponentielle converge elle aussi normalement sur l'ensemble $D_R$ défini plus haut, pour $R > 0$ fixé. On établit ainsi par dérivation terme à terme que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.

- Echange de l'intégration et de la sommation d'une série uniformément convergente

On se donne deux réels $a < b$ et on suppose $I = [a, b]$. Si la série de fonctions $u_n(x)$ intégrables converge uniformément vers la somme $S$ sur $I$, alors on peut échanger les symboles d'intégration et de passage à la limite : $\int_a^b \big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x\big)$.

- Transformation d'Abel

On suppose que le teme général $u_n(x)$ d'une série de fonctions peut s'écrire sous la forme $u_n(x) = a_n(x)\,b_n(x)$, avec les hypothèses suivantes : *(i)* les sommes $B_n(x) \equiv b_0(x) + b_1(x) + \ldots + b_n(x)$ restent uniformément bornées pour tout $n$: $\exists M, \forall x \in I$, $(\text{ou}\,\Omega)$, $|B_n(x)| \leq M$, et *(ii)* la suite $a_n(x)$ est positive, décroissante et tend vers zéro uniformément sur $I$ (ou $\Omega$) si $n$ tend vers l'infini. Alors la série de teme général $u_n(x)$ converge uniformément sur $I$ (ou $\Omega$).
Soit $\alpha$ tel que $0 < \alpha \leq \pi$. Alors la série de Fourier $\varphi(x)$ du premier exemple converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.