le cnam **Analyse et Calcul Matriciel**

Cours 7 Séries de Fourier (1)

- Quelques exemples

$\cos(2x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$,

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Polynôme trigonométrique

On se donne un entier $N \geq 1$, une famille de $2N+1$ réels (ou de complexes) α_k pour $0 \leq k \leq N$ et β_k pour $1 \leq k \leq N$. Un polynome trigonométrique est une fonction g périodique et de période 2π de la forme $g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)\big)$.

- Calcul des coefficients

On a $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$, $\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$.
Dans les expressions précédentes, on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et 2π par des intégrales entre $-\pi$ et π.

- Ecriture complexe d'un polynôme trigonométrique

Un polynôme trigonométrique g peut aussi s'écrire $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \exp(ikt)$. On a les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = \alpha_0$ et si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)$, $a_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)$.
Les coefficients a_k pour k entier tel que $-N \leq k \leq N$ s'obtiennent *via* la relation

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \exp(-ikt)\,\mathrm{d}t.$$

- Parité

Un polynôme trigonométrique pair n'a que des termes en cosinus et un polynôme trigonométrique impair n'a que des termes en sinus. Le polynôme trigonométrique $g(t)$ est une fonction paire [respectivement impaire] de la variable t si et seulement si $\beta_k = 0$ [respectivement $\alpha_k = 0$] pour tout k.

- Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période 2π : $f(t+2\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t. Les coefficients de Fourier $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ sont définis par $\alpha_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$

et si $k \geq 1$, $\alpha_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$, $\beta_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t$.

- Série de Fourier d'une fonction périodique

Avec les hypothèses précédentes, on se donne un entier $N \geq 1$. On définit la somme partielle de la série de Fourier de f grâce au polynôme trigonométrique

$$g_N(t) = \alpha_0(f) + \sum_{k=0}^{N} \big(\alpha_k(f)\cos(nt) + \beta_k(f)\sin(nt)\big).$$

François Dubois et Chloé Mimeau, 09 novembre 2016.

- Convergence de la série de Fourier dans le cas où la fonction est régulière

On suppose que la fonction périodique f de période 2π est de plus continuement dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier $g_N(t)$ est une série de fonctions qui converge normalement vers la fonction f. En particulier, la suite $\alpha_0(f)+\sum_{k=0}^{N}\big(\alpha_k(f)\,\cos(nt)+\beta_k(f)\,\sin(nt)\big)$ converge vers le nombre $f(t)$ si l'entier N tend vers l'infini.

- Théorème de Dirichlet : convergence de la série de Fourier dans un cas moins régulier

On se donne un nombre réel t_0. On suppose que la fonction périodique f de période 2π a une limite à gauche $f(t_0^-)$ si t tend vers t_0 par valeurs inférieures et a une limite à droite $f(t_0^+)$ si t tend vers t_0 par valeurs supérieures. On suppose de plus que $\frac{1}{h}\big(f(t_0^-)-f(t_0^- - h)\big)$ et $\frac{1}{h}\big(f(t_0^+ + h)-f(t_0^+)\big)$ ont une limite (pas nécessairement égales) si h tend vers zéro par valeurs supérieures. Alors la série de Fourier $\alpha_0(f)+\sum_{k=0}^{N}\big(\alpha_k(f)\,\cos(nt)+\beta_k(f)\,\sin(nt)\big)$ converge vers $\frac{1}{2}\big(f(t_0^-)+f(t_0^+)\big)$ si l'entier N tend vers l'infini.